

# 边坡振动台模型试验相似理论推导

詹志发<sup>1,2)</sup>, 祁生文<sup>1)</sup>, 郑博文<sup>1,2)</sup>, 邹宇<sup>1,2)</sup>

1) 中国科学院地质与地球物理研究所页岩气与地质工程重点实验室, 北京, 100029;

2) 中国科学院大学, 北京, 100049

科学问题的研究方法通常有理论分析、实际观测与模拟实验三种。模拟实验与前两种研究方法相比, 其优点为可人为控制和改变实验条件, 从而可确定单因素或多因素对研究问题影响的规律, 实验效应直观清楚、实验周期短、见效快、费用低(李晓红等, 2007)。目前, 开展振动台模型试验是边坡动力响应问题研究的主要模拟实验手段之一。

## 1 相似理论

相似的边坡物理模型通常都是以实际边坡为原型, 将相关参数按照一定的比例缩小来制作的。其中, 模型的设计与试验数据的处理, 以及所得试验结果与原型边坡之间的关系必须按照相似理论来进行确定。因此, 相似理论是振动台模型试验的基础, 而相似理论的主要内容是三个相似定理。

相似第一定理是 1848 年法国科学家贝特朗提出的关于现象相似的基本性质, 其内容可表述为: 对于相似的现象, 其单值条件相似, 其相似准则的数值(相似准数)相同, 或其相似指标等于 1。

相似第二定理又称为  $\pi$  定理, 是 1911~1914 年间, 苏联的费捷尔曼和美国的白金汉先后导出的(崔广心, 1990), 其内容可表述为: 描述某物理系统的物理量有  $n$  个, 其中有  $k$  个物理量表示基本量, 即量纲是相互独立的, 则其他  $n-k$  个物理量表示导出量, 这些量都具有一定的因次 ( $n>k$ ), 因为任何物理方程中的各项量纲都是齐次的, 那么这  $n$  个物理量就可表示成相似准则  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}$  之间的函数关系。

相似第一定理与相似第二定理是在假设现象相似的基础上导出的, 但是并没有说明如何判定两

现象是否相似。1930 年, 苏联学者基尔皮契夫和古赫曼提出了相似第三定理, 回答了如何判定两现象相似的问题。其内容表述为: 当现象的单值条件相似且由单值条件所组成的相似准则的数值相等时, 则现象就是相似的。

至此, 相似第一定理和相似第二定理给出了相似的必要条件, 而相似第三定理给出了相似的充分必要条件, 相似理论便形成了较完整的理论体系。

## 2 相似准则的导出

运用相似理论指导边坡模型试验的一般步骤是: 首先, 将原型边坡进行概化, 基于相似第三定理全面地确定现象相似的参量, 建立边坡振动台模型试验的相似判据; 然后, 通过相似第一定理的原则建立起该现象的全部  $\pi$  项; 最后, 则是将所得  $\pi$  项按相似第二定理的要求组成  $\pi$  关系式, 以用于模型的设计和试验结果的应用(罗先启等, 2008)。

试验前, 必须对边坡的主要结构条件进行分析, 一般而言主要包括边坡模型的几何尺寸、岩石材料和结构面的物理力学参数。据此, 岩质边坡振动台试验过程中主要考虑的物理参量有 16 个: 几何尺寸  $l$  [L] (边坡的长宽高)、密度  $\rho$  [M][L<sup>-3</sup>]、弹性模量  $E$  [M][L<sup>-1</sup>][T<sup>-2</sup>]、泊松比  $\mu$  [0]、抗压强度  $\sigma_c$  [M][L<sup>-1</sup>][T<sup>-2</sup>]、抗拉强度  $\sigma_t$  [M][L<sup>-1</sup>][T<sup>-2</sup>]、粘聚力  $C$  [M][L<sup>-1</sup>][T<sup>-2</sup>]、内摩擦角  $\varphi$  [0]、应力  $\sigma$  [M][L<sup>-1</sup>][T<sup>-2</sup>]、应变  $\xi$  [0]、位移  $u$  [L]、速度  $v$  [L][T<sup>-1</sup>]、加速度  $a$  [L][T<sup>-2</sup>]、重力加速度  $g$  [L][T<sup>-2</sup>]、频率  $f$  [T<sup>-1</sup>]、时间  $t$  [T]。其中, [L]、[T]、[M] 分别代表长度、时间和质量的量纲。

在确定了有关参量后, 则需要求出相似准则。

注: 本文为国家自然科学基金资助项目(编号 4172272, 41322020)及中国科学院知识创新工程项目(编号 KZZD-EW-05-02, KZCX2-EW-QN108)的成果。

收稿日期: 2015-03-01; 改回日期: 2015-03-01; 责任编辑: 费红彩。

作者简介: 詹志发, 男, 1989 年生, 博士研究生, 地质工程专业。Email: zhanzhifa@mail.iggcas.ac.cn。

相似准则的导出方法崔广心(1990)、罗先启(2008)等都做了较为详细的介绍。这里运用矩阵法(崔广心, 1990)来求取边坡模型试验的相似准则, 过程如下:

①根据本试验的目的, 选取关键的物理参量如上所述共 16 个。由量纲分析可知以上 16 个物理量均是由[M]、[L]、[T]为基本单位推到而来的, 这里选择几何尺寸  $l$ 、密度  $\rho$ 、加速度  $a$  为基本量, 其他量则为导出量。

②写出  $\pi$  项式为:

$$\pi = E^k \mu^b \sigma_c^c \sigma_t^d C^e \phi^h \sigma^i \xi^j u^m v^n g^o f^p t^q l^r \rho^s a^w \quad (1)$$

③列出如下表 1 所示的参数因次量表:

表 1 边坡模型试验参量因次量表

	$k$	$b$	...	$q$	$r$	$s$	$w$
	$E$	$\mu$	...	$t$	$l$	$\rho$	$a$
质量[M]	1	0	...	0	0	1	0
尺寸[L]	-1	0	...	0	1	-3	1
时间[T]	-2	0	...	1	0	0	-2
$\pi_1$	1	0	...	0	-1	-1	-1
$\pi_2$	0	1	...	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$\pi_{13}$	0	0	...	1	-0.5	0	0.5

④写出各参数指数间的代数方程式为:

$$\begin{aligned} k+c+d+e+i+s &= 0 \\ -k-c-d-e-i+m+n+o+r-3r+w &= 0 \\ -2k-2c-2d-2e-2i-n-2o-p+q-2w &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

⑤由上式可知, 未知量有 16 个, 而方程只有 3 个, 分别按照  $\pi_1$ 、 $\pi_2$ ..... $\pi_{13}$  的顺序将表 3-2 中虚线左侧值带入上式中求出  $r$ 、 $s$ 、 $w$  的值, 并填入虚线右侧, 所得结果如表 1 所示。

⑥由上表可得相似准则为:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= E/l\rho a, \pi_2 = \mu, \pi_3 = \sigma/l\rho a, \pi_4 = \sigma_c/l\rho a, \pi_5 = C/l\rho a, \\ \pi_6 &= \phi, \pi_7 = \sigma/l\rho a, \pi_8 = \xi, \pi_9 = \mu/l, \pi_{10} = v/(l\rho)^{0.5}, \pi_{11} = g/a, \\ \pi_{12} &= f^{0.5}/a^{0.5}, \pi_{13} = ta^{0.5}/l^{0.5} \end{aligned} \quad (3)$$

假设原型参数与模型参数的比值用  $C$  来表示, 则以上 16 个参数的相似常数分别为  $C_E$ 、 $C_\mu$ 、 $C_{\sigma_c}$ 、 $C_{\sigma_t}$ 、 $C_C$ 、 $C_\phi$ 、 $C_\sigma$ 、 $C_\xi$ 、 $C_u$ 、 $C_v$ 、 $C_g$ 、 $C_f$ 、 $C_l$ 、 $C_\rho$ 、 $C_a$ 。由于, 本试验是以几何尺寸  $l$ 、密度  $\rho$ 、加速度  $a$  为基本量, 取几何尺寸相似比为  $n$ , 密度和加速度的相似比均取为 1, 则由以上推得的相似准则可得边坡模型的相似关系如下表 2 所示:

参 考 文 献 / References

崔广心. 1990. 相似理论与模型试验. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1~98.  
 李晓红, 卢义玉, 康勇, 绕邦华. 2007. 岩石力学试验模拟技术. 北京: 科学出版社, 3~24.  
 罗先启, 葛修润. 2008. 滑坡模型试验理论及其应用. 北京: 中国水利水电出版社, 1~74.

表 2 边坡模型的相似关系

物理量	符号	相似关系	相似常数	物理量	符号	相似关系	相似常数
几何尺寸 (控制量)	$l$	$C_l=n$	$n$	内摩擦角	$\phi$	$C_\phi=1$	1
密度 (控制量)	$\rho$	$C_\rho=1$	1	应力	$\sigma$	$C_\sigma = C_l C_\rho C_a$	$n$
加速度 (控制量)	$a$	$C_a=1$	1	应变	$\xi$	$C_\xi=1$	1
弹性模量	$E$	$C_E = C_l C_\rho C_a$	$n$	位移	$u$	$C_u = C_l$	$n$
泊松比	$\mu$	$C_\mu=1$	1	速度	$v$	$C_v = (C_l C_\rho)^{0.5}$	$n^{0.5}$
抗压强度	$\sigma_c$	$C_{\sigma_c} = C_l C_\rho C_a$	$n$	重力加速度	$g$	$C_g=1$	1
抗拉强度	$\sigma_t$	$C_{\sigma_t} = C_l C_\rho C_a$	$n$	频率	$f$	$C_f = C_a^{0.5} C_l^{-0.5}$	$n^{-0.5}$
粘聚力	$C$	$C_C = C_l C_\rho C_a$	$n$	时间	$t$	$C_t = (C_l C_\rho)^{0.5}$	$n^{0.5}$