地 质 学 报
1989 年 ACTA GEOLOGICA SINICA 第 3 期

承压含水层中地下水向井群非稳定流动的边界元分析*

朱学愚 谢春红 邹泽远
（南 京 大 学）

本文论述了应用边界元法进行井群系统的非稳定流计算问题。非稳定井流的数学模型是一个抛物型微分方程的边值问题，是利用拉普拉斯变换消去时间变量，把它变为椭圆型微分方程的边值问题。水头的象函数 $\bar{H}$ 可用边界元法求解。我们导出了井群抽水条件下的象函数 $\bar{H}$ 的边界积分方程及其离散化的形式。利用它进行边界元计算时不需要对井壁边界进行离散，因而比较简便，并且易于处理井数很多时的计算问题。求得 $\bar{H}$ 后，地下水水头 H 可通过数值反演求得。

承压含水层中向井群系统的非稳定流计算是水文地质学中一个非常重要的课题，在诸如地下水资源评价和矿山排水等实际问题中会经常遇到，该问题可用边界元法解决。J. A. Liggett 和 P. L-F. Liu（1983）运用拉普拉斯变换法得到了地下水非稳定流的边界元解[1]，M. Radojkovic 和 J. Pečaric（1984）得到了稳定井流的边界元解。本文中我们同时考虑井群系统和非稳定流，利用拉普拉斯变换法得到了边界元解。

一、非稳定流动方程的拉普拉斯变换解

众所周知，在均质承压含水层中的非稳定流动方程为

$$\frac{S\partial H}{T\partial t}\,\Delta H+\frac{W}{T} \tag{1}$$

式中 S 是贮水系数，T 是导水系数，H 是水头，W 是垂直方向上的补给量（或排泄量），Δ 是拉普拉斯算子。

渗流区域表示在图 1 中。边界条件给出如下：

$$H=H_b \qquad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上，当 } t>0 \text{ 时} \tag{2}$$

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=-q \qquad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上，当 } t>0 \text{ 时} \tag{3}$$

---

* 本文系国家自然科学基金委员会资助的课题。
本文 1988 年 2 月收到，5 月改回，沈晓毅编辑。

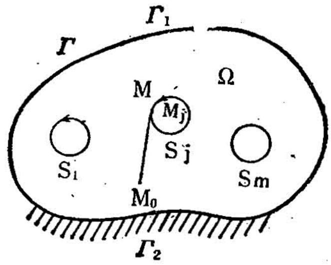

图 1 渗流区域

Fig. 1 The soepage domain

$$\int_{s_j} T\frac{\partial H}{\partial r}dS_j = Q_j \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{4}$$

或者

$$2\pi T r_j \frac{\partial H}{\partial r}\bigg|_{s_j} = Q_j \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

式中 n 是边界的单位外法线方向，q 是沿法线方向的通量，s_i 是 j 号井的井壁圆周，Q_j 是 j 号井的抽水量，r_j 是该井的半径。

初始条件为

$$H = H_0 \qquad 当\ t=0\ 时 \tag{6}$$

利用拉普拉斯变换

$$\bar{H} = \int_0^\infty He^{-pt}dt \tag{7}$$

问题(1)—(6)可化为如下的问题 (A)：

$$(\mathrm{A})\begin{cases}\Delta\bar{H} - \dfrac{S}{T}p\bar{H} = -\dfrac{S}{T}H_0 - \dfrac{\bar{W}}{T} & (8)\\[2ex] \bar{H} = \dfrac{H_b}{p} \qquad 在\ \Gamma_1\ 上 & (9)\\[2ex] T\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial n} = -\dfrac{q}{p} \qquad 在\ \Gamma_2\ 上 & (10)\\[2ex] 2\pi T r_j\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial r_j} = \dfrac{Q_j}{p} \qquad 在\ s_j\ 上，j=1,2,\cdots,m & (11)\end{cases}$$

式中 $\bar{H}$ 是指水头 H 的象函数，p 为拉普拉斯变换的变换参数，恒取正值。

问题 (A) 是椭圆型方程的边值问题，可以用边界元法求解。

假设 $M_0(x_0, y_0)$ 是区域 Ω 中的固定点而 $M(x,y)$ 为动点，考虑如下的方程

$$\Delta\bar{H} - \frac{S}{T}p\bar{H} = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{12}$$

式中 δ 是二维的狄拉克函数，Δ 仍为拉普拉斯算子。

方程式(12)的解是一个自由空间的格林函数，表达式如下

$$G(M,M_0) = -K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} r_{MM_0}\right] \tag{13}$$

此处

$$r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

并且 K_0 是零阶的第二类虚宗量的贝塞尔函数。利用格林第二公式，可以求得任一点 M_0 上的象函数的解[1]

$$\alpha_{M_0}\bar{H}(M_0)=\int_{\Gamma}\left(\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right)ds+\iint_{\Omega}G\left(\frac{S}{T}H_0+\frac{\bar{W}}{T}\right)dxdy \tag{14}$$

式中 α_{M_0} 是在 M_0 点边界的夹角。如 M_0 点在区域内部则为 2π，在光滑的边界上为 π。方程式(14)就是象函数 $\bar{H}$ 的边界积分方程。

二、井群系统边界元的基本方程

如果存在井群系统，方程式(14)的右端第一项可表达如下：

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}\left(\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right)ds=&\int_{\Gamma_1}\left(\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right)ds\\&+\int_{\Gamma_2}\left(\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right)ds\\&+\sum_{i=1}^{m}\int_{s_i}\left(\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right)ds\end{aligned} \tag{15}$$

现在让我们计算方程式(15)的最后一项。其中

$$\begin{aligned}\int_{s_i}G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}ds&=-K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{M_0M_i}\right]\int_{s_i}\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}ds_M\\&=K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{M_0M_i}\right]\int_{s_i}\frac{\partial \bar{H}}{\partial r_{MM_i}}ds_M\\&=K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{M_0M_i}\right]\frac{Q_i}{T}\end{aligned} \tag{16}$$

因为在井壁圆周上，象函数 $\bar{H}$ 是相同的，用 $\bar{H}_i$ 表示，因此

$$\begin{aligned}\int_{s_i}\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}ds&=\bar{H}_i\int_{s_i}\frac{\partial}{\partial n}\left[-K_0\left(\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right)\right]ds_M\\&=-\bar{H}_i\int_{s_i}K_1\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}\frac{\partial r_{MM_0}}{\partial r_{MM_i}}ds_M\\&\approx-\bar{H}_iK_1\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{M_0M_i}\right]\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}r_i\cos\theta d\theta=0\end{aligned} \tag{17}$$

式中 K_1 是一阶的第二类虚宗量的贝塞尔函数。θ 为矢量 $\overline{MM_0}$ 和 $\overline{MM_i}$ 的夹角。

将方程式(16)和(17)代入方程式(14)和(15)，得到：

$$\alpha_{M_0}\bar{H}(M_0)=\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left(\bar{H}\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right)ds+\iint_{\Omega}G\left(\frac{S}{T}H_0+\frac{\bar{W}}{T}\right)dxdy$$

$$-\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}Q_jK_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{M_0M_j}\right] \tag{18}$$

最终我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_{M_0}\overline{H}(M_0) = &-\iint_{\Omega}K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\left(\frac{S}{T}H_0+\frac{\overline{W}}{T}\right)dxdy\\ &+\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left\{\overline{H}\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}K_1\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\cos(n,\overline{M_0M})\right.\\ &\left.+K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\frac{\partial\overline{H}}{\partial n}\right\}ds\\ &-\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}Q_jK_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

这是当存在若干抽水井时的边界元的基本方程式。式中

$$\alpha_{M_0}=\begin{cases}2\pi & \text{如果 } M_0 \text{ 点位于区域内部}\\ \pi & \text{如果 } M_0 \text{ 点位于光滑的边界上}\\ \text{边界的夹角} & \text{如果 } M_0 \text{ 点在边界上,而边界不光滑}\end{cases}$$

一旦给定了变换参数 p, 积分

$$-\iint_{\Omega}K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\left(\frac{S}{T}H_0+\frac{\overline{W}}{T}\right)dxdy$$

可用高斯求积公式算出。如果我们给出不同的参数 p 值，我们可以求得任一点 M_0 上的不同的象函数 $\overline{H}(M_0,p)$。如果给出一组参数

$$p_1,\ p_2,\cdots,p_N$$

则在 M_0 点可得到一组相对应的象函数

$$\overline{H}(M_0,p_i)\quad i=1,2,\cdots,N$$

这组象函数可以用边界元方法计算出来。

三、数 值 反 演

方程式(1)—(5)的解的形式也可近似表达如下:

$$H(x,y,t)=H_s(x,y)+\sum_{i=1}^{N}a_i\exp(-b_it) \tag{20}$$

式中 $H_s(x,y)$ 是在点 $M(x,y)$ 的稳定水头，a_i 和 b_i 为某些待定的常数。
为了得到 a_i 和 b_i 的值,我们对(20)式进行拉普拉斯变换,并且让

$$b_i=p_i\quad(i=1,2,\cdots,N)$$

因而有

$$\overline{H}(x,y,p)=\frac{H_s(x,y)}{p}+\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{p_i+p} \tag{21}$$

如果我们把坐标 (x,y) 放在点 $M_0(x_0,y_0)$ 上,并且依次取

$$p = p_1,\ p_2, \cdots, p_N$$

每取一个 p 值，都可以写出(21)式，得到一个共有N个方程的方程组，如下式，

$$\left\{\begin{array}{l}
\overline{H}(x_0, y_0, p_1) = \dfrac{H_s(x_0, y_0)}{p_1} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_i}{p_i + p_1} \\
\overline{H}(x_0, y_0, p_2) = \dfrac{H_s(x_0, y_0)}{p_2} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_i}{p_i + p_2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{H}(x_0, y_0, p_N) = \dfrac{H_s(x_0, y_0)}{p_N} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_i}{p_i + p_N}
\end{array}\right. \tag{22}$$

如果把(22)式左端的象函数用边界元解求得的象函数值 $\overline{H}(x_0, y_0, p_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 代替，则方程组(22)中的未知数仅仅为 $a_i (i = 1, 2, \cdots, N)$，也是$N$个。方程的个数和未知数的个数是相同的；我们能够得到一组唯一的解

$$a_i \ (i = 1, 2, \cdots, N)$$

最后，空间任一点 $M_0(x_0, y_0)$ 在时间 t 的地下水水头的近似值可用下式计算

$$H(x_0, y_0, t) = H_s(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{N} a_i \exp(-p_i t) \tag{23}$$

即为原问题(1)—(6)的解。

四、算　例

我们计算了几个算例，将边界元的结果和解析解加以比较。例 1 的计算区域是一个 $4 \times 4\text{km}^2$ 的正方形，表示于图 2 中。水井抽水量为 $2000\text{m}^3/\text{d}$，贮水系数为 0.001；导水系数为 $400\text{m}^2/\text{d}$，理论解是基于泰斯解、映象原理和叠加原理。边界元的结果和解析解的比较表示在图 3 中。从抽水井至观测孔 1 的距离是 10m，到观测孔 4 的距离是 100m，到观测孔 7 的距离是 500m。从图中可以看出，边界元解和解析解是相当符合的，最大的误差小于 12cm。

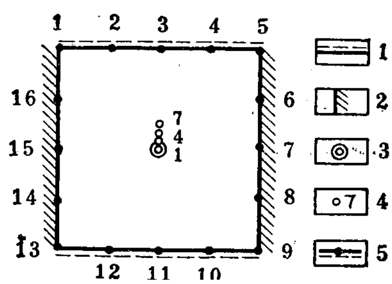

图 2　例 1 的计算区域

Fig. 2　Configuration of example 1

1.定水头边界，$H = H_0$；2.不透水边界；3.抽水井；4.观测孔；5.节点

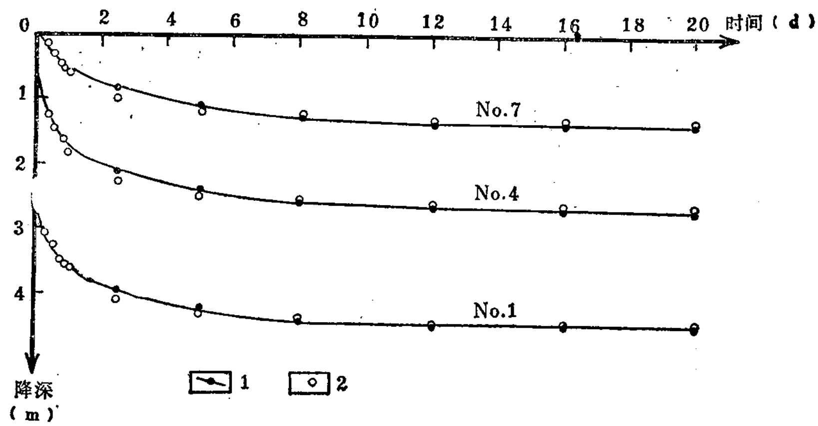

图 3 例 1 的边界元结果和解析解的比较

Fig. 3 The comparison between BEM results and analytic solutions, example 1

1.解析解；2.边界元解

例 2 的流动区域和例 1 相同，也是 4 × 4km²，但边界条件变化了，所有的边界都是定水头，水文地质参数 T、S 以及其他的水文地质条件都和例 1 相同。边界元的结果和解析解的比较表示在图 4 中。拟合状况比例 1 好，最大的误差小于 7cm，大多数的点偏离理论解小于 3cm。

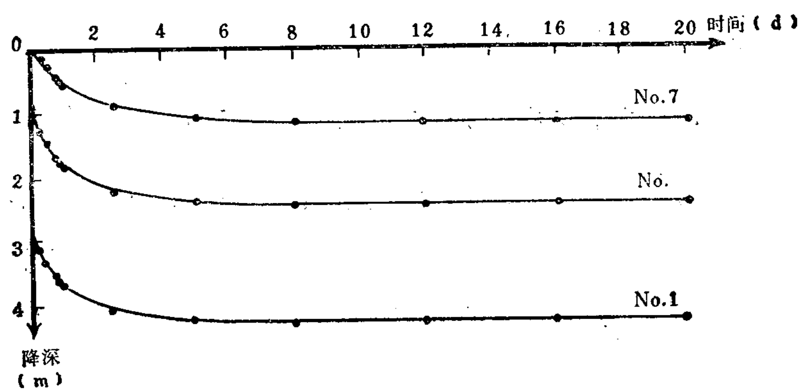

图 4 例 2 的边界元解和解析解的比较

Fig. 4 The comparison between BEM and analytic solutions, example 2

图中黑点为边界元解，黑线为解析解

结 论

本文利用拉普拉斯变换的方法给出了地下水向井群系统非稳定流问题的边界元解。算例表明，拉普拉斯变换法的边界元结果和解析解相当一致。似乎第一边值问题的结果要比混合边值问题的结果好些。

这种方法可应用于地下水资源计算的实际问题，如果作某些变更，也可推广到越流含水层的非稳定流计算。

参 考 文 献

[1] Liggett, James A. and Liu, Philip L-F., 1983, The boundary integral equation method for porous media flow. pp. 171—183, George Allen & Unwin, London.

[2] Radojkovic, Miodrag and Pecaric, Josip., 1984, Boundary element analysis of flow in aquifers, proceedings of the fifth international conference on finite elements in water resources. pp. 723—736, CMC, Southampton.

[3] Brebbia, C. A., 1981, Progress in boundary element methods. Vol. 1, pp. 45—70, Pentech Press, London.

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS (LAPLACE TRANSFORM METHOD) OF GROUNDWATER UNSTEADY FLOW TO A WELL SYSTEM IN A CONFINED AQUIFER

Zhu Xueyu, Xie Chunhong and Zou Zeyuan

(Nanjing University)

Abstract

The calculations of unsteady flow to a multiple well system are of great importance to groundweter supply and drainage. This paper discusses the application of the boundary element method in solving this problem.

The mathematical model of unstrady well flow is

$$
(\mathrm{A}')\begin{cases}
\Delta H + \dfrac{W}{T} = \dfrac{S}{T}\dfrac{\partial H}{\partial t} & \text{在}\ \Omega\ \text{中，当}\ t > 0\ \text{时} \\
H = H_b & \text{在}\ \Gamma_1\ \text{上，当}\ t > 0\ \text{时} \\
T\dfrac{\partial H}{\partial n} = -q & \text{在}\ \Gamma_2\ \text{上，当}\ t > 0\ \text{时} \\
\displaystyle\int_{s_j} T\frac{\partial H}{\partial r}\,ds_j = Q_j & j = 1,2,\cdots,m
\end{cases}
$$

where H is the groundwater head, Δ is Laplacian, S is the coefficient of storage, T is the transmissibility, W is the recharge and Q_j is the pumping rate of well No. j.

By means of Laplace Transform the time variable is eliminated. Then the authors derive the basic equation of the boundary element method of the transformed variable $\bar{H}$ as follows

$$
a_{M_0}\bar{H}(M_0,p) = -\iint_{\Omega} K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} r_{MM_0}\right]\left(\frac{S}{T}H_0 + \frac{W}{T}\right)dx\,dy
$$

$$+\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left\{\bar{H}\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}K_1\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\cos(n,\overline{M_0M})\right.$$

$$\left.+K_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{MM_0}\right]\frac{\partial\bar{H}}{\partial n}\right\}ds$$

$$-\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}Q_jK_0\left[\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}r_{M_0M}\right] \tag{1}$$

where K_0 and K_1 are modified Bessel functions.

$$\alpha_{M_0}=\begin{cases}2\pi & \text{if } M_0 \text{ is inside the domain}\\ \pi & \text{if } M_0 \text{ is located at smooth boundary}\\ \text{Interior angle of the boundary} & \text{if } M_0 \text{ is located at unsmoothed boundary.}\end{cases}$$

p is the parameter of transformation.

By equation

$$\bar{H}(M_0,p)=\frac{H_s}{p}+\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{p_i+p} \tag{2}$$

constants a_i can be determined, where H_s is the solution of steady state. Finally the groundwater head H can be given by

$$H(M_0,t)=H_s(M_0)+\sum_{i=1}^{N}a_ie^{-p_it} \tag{3}$$

Two examples are cited to compare the results of the boundary element method with analytic solutions. They are in good agreement.

朱学愚，1936年生，1954年毕业于南京大学地质系水文地质工程地质专业，从事水文地质(地下水动力学、地下水资源评价和地下水模型等)的研究，现为南京大学地球科学系副教授。