地 质 学 报

1988 年 ACTA GEOLOGICA SINICA 第 3 期

含八次及十二次对称轴的准晶体的点群与单形

施倪承 廖立兵

（中国地质大学北京研究生院）

本文研究了含八次对称轴的准晶体的点群和单形及其一维准晶格的描述问题。一维准晶格可用一个新的序列来描述，该序列的前 10 个数为 1，1，2，5，12，29，70，169，408，985，序列的前五个步序中准周期的排列为 a，b，ab，babab，bababab babab。推导了八次对称准晶体的点群为 8，8m，82，8/m，8/mmm，$\bar{8}$，$\bar{8}$2m，单形为八方柱，复八方柱，八方单锥，复八方单锥，八方双锥，复八方双锥，八方偏三角面体，复八方偏三角面体，八方偏方面体。并推导了含十二次对称的七种点群及九种单形。

自具有五次、十次、十二次对称轴的准晶体发现以来[1-3]，近来准晶体研究的一个新进展是在 V-Cr-Ni-Si 速冷合金中具有八次对称轴的准晶体二维图象的发现[4]。八次对称的存在与否，在实验上加以证明要比五次对称轴的证明更加困难，如必须严格地排除四次对称相所形成的双晶的可能性等。王宁等用透射电子显微镜方法已就这方面作了大量的实验[4]，根据实验结果可以确信，准晶体二维图象中，八次对称轴是客观存在的。

八次对称轴的发现，把一系列的理论问题又一次提到了结晶学家面前。关于准晶体的点群与单形问题，彭志忠曾对等轴、五方、十方晶系的点群与单形作了推导[5]，并且阐明了含五次对称的准晶体的一维准晶格中，准周期的排列符合 Fibonacci 序列。本文将继续彭志忠的工作，着重说明在八次对称轴的情况下，一维准晶格的描述及含八次对称的准晶体的点群和单形的推导问题，并将同时给出十二次对称轴准晶体的点群和单形。

对于八次对称的准晶体来说，用于研究五次对称的准晶体而提出的二十面体及黄金中值原理肯定是不适用的。作者在对它进行研究时提出了描述八次对称准晶格中准周期 a、b 在一维方向排列规律的一个新序列[6]。该序列在各步序的准周期数目及排列方式上，均与 Fibonacci 序列不同。现将该序列前 13 个步序中所含的准周期数目（即 a、b 两种准周期之和）列于表 1，序列前 6 个步序中准周期 a、b 的排列次序为：

n =	0	1	2	3	4	5
	a	b	ab	babab	bababbbabab	bababbababbbababbababababbabab
s_n =	1	1	2	5	12	29

八次对称准晶格的行列中有两个准周期，它们的长度比 $a/b=\sqrt{2}$，S_n 代表第 n 个

本文 1987 年 12月收到，1988 年 1 月改回，周健编辑。

表 1　新序列中的前 13 个数

Table 1　The first thirteen numbers of the new sequence

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sn	1	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860

步序中所含的准周期数。 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\sqrt{2}+1$ ($\doteq 2.414$)，而其倒数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n+1}}=\sqrt{2}-1\ (\doteq 0.414)。$$

这种情况与 Fibonacci 数列中 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ($\doteq 1.618$)，而其倒数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\doteq 0.618)$$

的情况呈十分有趣的相似(即取倒数后，小数点后面的数字皆不变！)。S_n 可用公式表示：

$$S_n=2S_{n-1}+S_{n-2}\qquad n\geqslant 3$$

如用 Q_n 来表示第 n 步序中首尾相接的符号 a、b 的排列次序，则

$$Q_n=-Q_{n-2}Q_{n-1}Q_{n-1}$$

这里 $-Q_{n-2}$ 表示排列次序与 Q_{n-2} 相反的符号排列。

准晶体不具备经典结晶学意义上的平移对称，但它可具有经典结晶学中全部的外形(宏观)对称要素（对称中心、对称面、对称轴、旋转反伸轴)。因此准晶体有它自己固有的点群及单形。 苗柏和等[7]已报道了在 Mn-Al 速冷合金中观察到了属 m $\bar{3}\bar{5}$ 点群的单形的有趣事实。根据彭志忠对含五次对称的准晶体的点群与单形推导[5]，与经典结晶学比较起来，引入的新点群有：

等轴晶系　m $\bar{3}\bar{5}$, 235

五方晶系　5, $\bar{5}$, 5m, $\bar{5}$m, 52

十方晶系　10, $\overline{10}$, 10m $\overline{10}$m 10, 2, 10/m, 10/mmm

由于八次对称轴的发现，今引入八方晶系的新点群，它们是： $C_8=8$, $C_{8v}=8$m,

表 2　八方晶系各点群对应的单形

Table 2　Single forms for each point group of octagonal system

八方晶系	8	$\bar{8}$	8m	$\bar{8}$2m	82	8/m	8/mmm
{001}	单　面	平行双面	单　面	平行双面	平行双面	平行双面	平行双面
{100}	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱
{110}	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱	八方柱
{hk0}	八方柱	八方柱	复八方柱	复八方柱	复八方柱	八方柱	八方柱
{h0l}	八方单锥	八方双锥	八方单锥	八方双锥	八方双锥	八方双锥	八方双锥
{hhl}	八方单锥	八方双锥	八方单锥	八方双锥	八方双锥	八方双锥	八方双锥
{hkl}	八方单锥	八方偏三角面体	复八方单锥	复八方偏三角面体	八方偏方面体	八方双锥	复八方双锥

$D_8=82$，$C_{8h}=8/m$，$D_{8h}=8/mmm$，$C_{8i}=\bar{8}$，$D_{4d}=\bar{8}2m$，各点群所对应的单形见表 2。

在表 2 中有九种单形是八方晶系所特有的，它们是八方柱、复八方柱、八方单锥、复八方单锥、八方双锥、复八方双锥、八方偏方面体，八方偏三角面体，复八方偏三角面体，上述 9 种单形如图 1 所示。

关于含十二次对称轴的准晶体的点群和单形的推导与八次对称轴的情况是相似的，

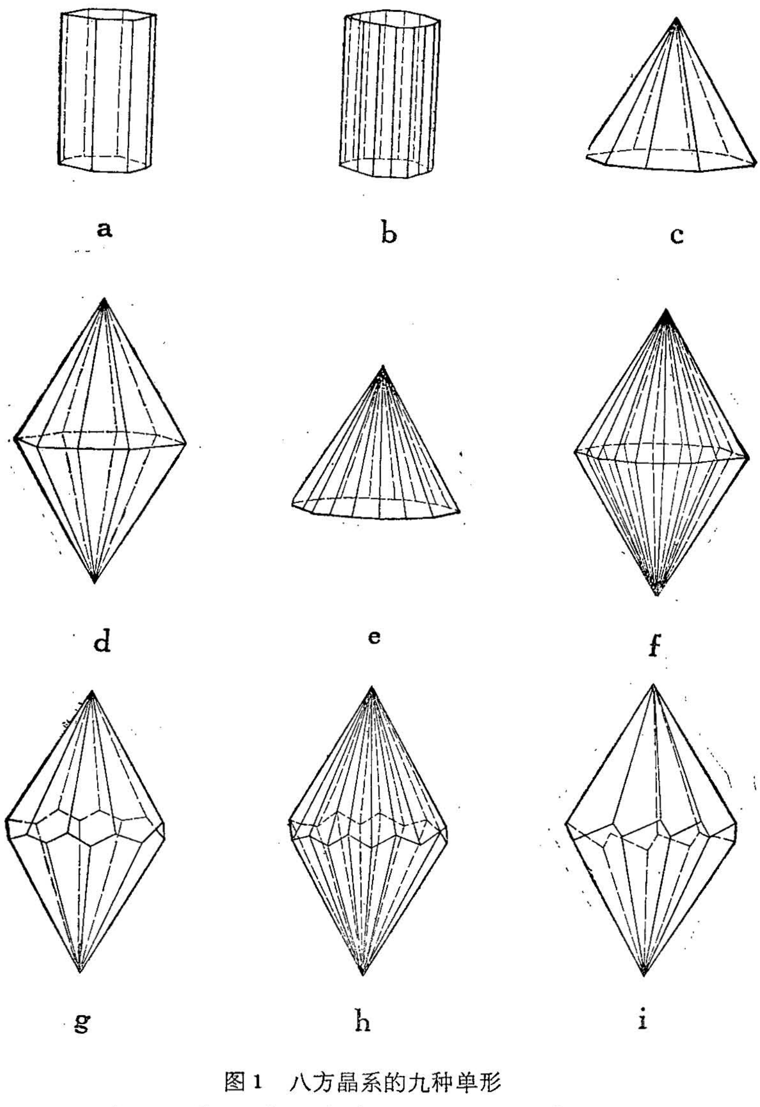

图 1　八方晶系的九种单形

Fig. 1　Nine unique single forms for octagnal system

a. 八方柱 (octagnal prism); b. 复八方柱 (dioctagnal prism); c. 八方单锥 (octagnal pyramid); d. 八方双锥 (octagnal dipyramid); e. 复八方单锥 (dioctagnal pyramid); f. 复八方双锥 (dioctagnal dipyramid); g. 八方偏三角面体 (octagnal scalenohedron); h. 复八方偏三角面体 (dioctagnal scalenohedron); i. 八方偏方面体 (octagnal trapezohedron)

其点群为：

$$C_{12}=12,\ C_{12v}=12m,\ D_{12}=122\ \ C_{12h}=12/m$$

$$D_{12h}=12/mmm,\ C_{12i}=\overline{12},\ D_{6d}=\overline{12}2m。$$

其单形为十二方柱，复十二方柱，十二方单锥，复十二方单锥，十二方双锥，复十二方双锥，十二方偏方面体，十二方偏三角面体，复十二方偏三角面体。至此，在准晶体中共推导了28 种点群及 42 种单形，如加上原来经典结晶学中的 32 种点群及 47 种单形，则共有 60 种点群及89种单形。

参 考 文 献

[1] Shechtman, D., Blech, I., Gatias, D. and cahn, j. w., 1984, Metallic phase with longrange orientational order and no-translational symmetry. Phy. Rev. Lett., Vol. 53, pp. 1951—1953.

[2] Ishimasa, T., Nissen H. U. and Fukano Y, 1985, New order state between crystalline and amorphous in Ni-Cr particles. Phs. Rev. Lett., Vol. 55, pp. 511—513.

[3] Bendersky, L., 1985, Quasicrystal with one-dimensional translational symmetry and a tenfold rotation axis. Phys. Rev. Lett., Vol. 55, pp. 1461—1463.

[4] Wang N., Chen H. and Kuo K. H., 1987, Two-dimensional Quasicrystal with Eightfold Rotational Symmetry. Phys. Rev. Lett., Vol. 59, pp. 1010—1013.

[5] 彭志忠，1986，含五次对称的准晶体的点群与单形．地球科学，第 11 卷，第五期，第 499—506 页

[6] 施倪承、闵乐泉，八次对称准晶格引出的新序列．科学通报(待刊).

[7] Miao Baihe, Yang Guobin and Wang Su, 1987, Pentagonal Dodecahedron formation by quasicrystal micrograins. PHYSICS LETTERSA. Vol. 121, pp. 283—285.

POINT GROUPS AND SINGLE FORMS OF QUASICRYSTALS WITH EIGHTFOLD AND TWELVEFOLD SYMMETRY

Shi Nicheng and Liao Libing

(Beijing Graduate School, China University of Geosciences)

Abstract

The existence of eightfold symmetry has been confirmed by experiments. This paper mainly deals theoretically with the description of one-dimensional quasilattice and the deduction of point groups and single forms of octagonal quasicrystals. The authors present a new sequence for describing the arrangement of quasiperiods in one-dimension of octagonal quasiccrystals. The numbers of quasiperiods in each of the first thirteen steps of this new sequence are: 1, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741 and 13860. The arrangement of quasiperiods in the first six steps are: a, b, ab, babab, babababbabab and bababba bababbababababba-babbababababbabab. Seven point groups and nine single forms for the octagonal system have been deduced. They are as follows:

Point groups. 8, 8m, 82, 8/m, 8/mmm, $\bar{8}$ and $\bar{8}2$m.

Single forms: octagonal prism, dioctagonal prism, octagonal pyramid, dioctagonal pyramid, octagonal dipyramid, dioctagonal dipyramid, octagonal scalenohedron, dioctagonal scalenohedron, and octagonal traperohedron.

For dodecahegonal quasicrystals, the point groups are: 12; 12m; 122; 12/m; 12/mmm; 12; $\overline{12}$2m. The single forms are dodecahegonal prism, didodecahegonal prism, dodecahegonal pyramid, didodecahegonal pyramid, dodecahegonal dipyramid, didodecahegonal dipyramid, dodecahegonal traperohedron, dodecahegonal scalenohedron and didodecahegonal scalenohedron.

The authors have obtained 14 point groups and 18 single forms. In addition to the 14 point groups and 24 single forms of isometric system, pentagonal system, and decagonal system, there are 28 point groups and 42 single forms in quasicrystals. Plus the 32 point groups and 47 single forms from the classical crystallography, there are 60 point groups and 89 single forms all together.