

n 维自仿射分形及其在地球化学中的应用

申维

中国地质大学国土资源与高新技术研究中心, 北京, 100083

内容提要:分形概念应用在地球科学中来刻画地质质量和物体的自相似特征。研究表明分形模型常常提供有力工具来刻画地质质量和物体的基本空间分布结构。本文提出了 n 维自仿射分形的检验与定量评定方法。通过实例, 说明 n 维自仿射分形的方法在实际问题中的方法和步骤, 并解释了分维数的实际意义。分维数是反映区域化变量在某方向变化程度的定量指标。该方法不仅适用于地球化学金元素和银元素数据, 而且还适用于其他元素和地质数据, 具有普遍的意义。

关键词:分维数; 自相似; 地球化学元素

在地球科学领域里, 分形概念 (Mandelbrot, 1983) 被广泛应用于具有自相似的地质现象。分形是其组成部分以某种方式与整体相似的形, 可以是完全的自相似, 也可以是统计意义上的自相似。自仿射分形的特征是分形体变化是各向异性的, 即在不同方向具有不同标度因子, 自相似分形作为它的特殊情况, 即在不同方向具有相同标度因子。

地壳中元素迁移聚集和成矿过程的混沌动力学机制, 地质环境中非线性过程的相互作用是造成地壳元素含量与矿化不均匀分布的原因, 并由此导致元素含量、矿床储量及其空间分布的分形结构。许多地质现象具有尺度不变性, 例如岩石碎片、断层、地震、火山喷发、矿藏和油井的频度和大小之间的分布。

自20世纪80年代初以来, 一些专家学者 (秦长兴等, 1992; 周永章等, 1994; Cheng et al., 1996; Hou, 1998; 丁式江等, 1998; Shen et al., 2002a; Li et al., 2002; 施俊法, 2000; 申维, 2000; 申维等, 2003) 注意到了地质学中的自相似现象, 并试图将分形理论运用于地学之中。孟宪国等 (1991) 的研究表明, 地质数据中广泛存在分形结构; 成秋明等 (Cheng et al., 1994) 研究了地球化学异常, 并用分形方法区分地球化学背景值, 取得了较好的效果。申维等 (Shen et al., 2002b) 提出了多维自仿射分布的概念, 论证了多维自仿射分布在截尾条件下具有尺度不变的分形性质, 并将该分布应用于地球化学元素数据; Sapozhnikov 等 (1995) 提出了一个检验与定

量评定自仿射性质的方法, 研究了任何复杂几何图形 (如交织的河流)。

1 n 维自仿射分形的定义

统计自相似分形 (Turcotte, 1997) 是各向同性的, 即在由 x 和 y 坐标所确定的二维情况下, 结果与 x 轴和 y 轴的几何取向无关。二维 xy 空间统计自相似的定义: $f(rx, ry)$ 与 $f(x, y)$ 是统计相似的, 其中 r 是一个标度因子。一个分形关系, 可用下面等式表示:

$$N(\leq r) = Cr^D \quad r > 0$$

其中 r 表示特征尺度; $C > 0$, 称为比例常数; $D > 0$, 称为分维数; $N(\leq r)$ 表示尺度小于或等于 r 的数目。

若用来覆盖海岸线的尺度为 x_1, y_1 的盒子数是 N_1 的话, 则用尺度 rx_1, ry_1 的盒子覆盖海岸线所需要的盒子数 N_2 , 在海岸线是自相似的前提下, 有关系:

$$\frac{N_1}{N_2} = r^D$$

n 维 $x_1, \dots, x_n$ 空间统计自相似的定义: $f(rx_1, \dots, rx_n)$ 与 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是统计相似的, 其中 r 是一个标度因子。

统计自仿射分形不是各向同性的。二维 xy 空间统计自仿射的定义: $f(rx, r^H y)$ 与 $f(x, y)$ 是统计相似的, 其中 H 叫做 Hausdorff 测度。在应用数盒子方法时, 随着盒子大小的增加, 正方形的盒子变成越来越长 (长和宽) 的长方形盒子。

注: 本文为国家自然科学基金资助项目 (编号 40172099) 和国土资源部科技项目 (编号 B7-10) 的成果。

收稿日期: 2003-09-22; 改回日期: 2004-02-04; 责任编辑: 章雨旭。

作者简介: 申维, 男, 1957年生。教授, 博士后。主要从事数学地质的科研和教学工作。电话: 010-82320115; Email: shenweihome@sina.com。

n 维 $x_1, \dots, x_n$ 空间统计自仿射的定义: $f(r^{d_1} x_1, \dots, r^{d_n} x_n)$ 与 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是统计相似的, 其中 $d_i (i=1, \dots, n)$ 是常数。

2 n 维自仿射分形的检验与定量评定方法

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一个 n 维体的 n 个边长, $M(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是用边长分别为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的 n 维体覆盖研究对象或物体所需要的数目。由空间标度性质, 可推出下面的关系:

$$M(X_1, X_2, \dots, X_n) \propto X_1^{D_1} \propto X_2^{D_2} \propto \dots \propto X_n^{D_n} \quad (1)$$

其中 D_i 是 X_i 方向的分维数 ($i=1, 2, \dots, n$), 符号 $\propto$ 表示成正比。

式(1)可改写成以下形式:

$$\left(\frac{X'_1}{X''_1}\right)^{D_1} = \left(\frac{X'_2}{X''_2}\right)^{D_2} = \dots = \left(\frac{X'_n}{X''_n}\right)^{D_n} = \left(\frac{M'}{M''}\right) \quad (2)$$

令 $x_i = \lg X_i$, ($i=1, 2, \dots, n$); $z = \lg M$, 可得:

$$\frac{x''_1 - x'_1}{1/D_1} = \frac{x''_2 - x'_2}{1/D_2} = \dots = \frac{x''_n - x'_n}{1/D_n} = z'' - z' \quad (3)$$

或

$$\frac{dx_1}{1/D_1} = \frac{dx_2}{1/D_2} = \dots = \frac{dx_n}{1/D_n} = dz \quad (4)$$

其中 $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为对数相关积分函数。比较等式(4)与

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n = dz \quad (5)$$

我们可推出

$$\frac{1}{D_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{1}{D_2} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \frac{1}{D_n} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 1 \quad (6)$$

等式(6)提供了检验研究对象的空间尺度不变性存在和自仿射物体分维数 $D_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的估计方法。我们通过直接计算 $M(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 可得到对数相关积分函数 $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 然后计算偏导数 $\partial z(x_1, x_2, \dots, x_n) / \partial x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并用它们检验线性关系等式(6)是否成立。如果成立, 就可以得到 $D_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的值。 D_i 是最佳拟合 n 维平面在 X_i 轴或方向的截距 ($i=1, 2, \dots, n$)。

特别地, 当 $n=2$ 时, 上面 n 维情形化为平面情形(即二维情形 Foufoula-Georgiou et al., 2001)。

令 $X_1=X, X_2=Y$, 式(1)相应写成

$$M(X, Y) \propto X^{D_1} \propto Y^{D_2} \quad (7)$$

式(6)相应写成

$$\frac{1}{D_1} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{D_2} \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad (8)$$

此时, D_2 和 $-\frac{D_2}{D_1}$ 分别是最佳拟合直线的截距和斜率。

3 应用实例

山东胶东地区是中国著名的金矿化集中区和黄金产地。笔者等以该地区的地球化学元素为例(Au 元素和 Ag 元素), 说明以上方法在地球化学元素中的应用方法和步骤。Au 元素和 Ag 元素样本数都是 21316 个。

考虑区域化变量 $Z(w)$ 在二维空间中某方向的两点 $w, w+h$ 的增量方差 $V(w, h) = \text{Var}(Z(w+h) - Z(w))$ 。其中 $h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 为在某一方向的增量; $\Delta x, \Delta y$ 分别为在 x 与 y 方向的增量。若 $Z(x)$ 满足二阶平稳假设, 并且存在分形结构, 则在其无标度区内有:

$$\gamma(h) = \frac{\text{Var}(Z(w+h) - Z(w))}{2} = C \cdot h^D \propto h^D, h > 0, 0 < D < 2 \quad (9)$$

其中 C 和 D 为未知参数。我们称 $\gamma(h)$ 为分形变差函数, 实即幂函数模型变差函数。此时参数 D 是分维数, 它反映区域化变量在该方向变化程度的定量指标。分维数 D 越大, 区域化变量变化程度越高 ($h > 1$ 时)。如矿层厚度等变量比金属矿床的各种金属品位变量变化程度低。

令 $M(X, Y) = \gamma(h) = \gamma(\Delta x, \Delta y)$, 应用实验变差函数计算公式和程序, 选取在 x 与 y 方向的不同增量值, 可计算出相应的 $M(X, Y)$ 。对于等式(8), 我们采用差分法和改进的最小二乘法(有标准计算程序), 可得到 D_1 和 D_2 的估计值 $\hat{D}_1$ 和 $\hat{D}_2$ 。图1和图2是应用该方法处理地球化学元素 Au 和 Ag 数据分维数估计值的拟合图。

地球化学元素 Au 和 Ag 数据, 可以认为是区域化变量。我们应用以上方法, 得到以下结果(见图1和图2): Au 元素数据东西方向(即 x 方向)的分维数估计值 $\hat{D}_1 = 0.13$; Au 元素数据南北方向(即 y 方向)的分维数估计值 $\hat{D}_2 = 0.10$; Ag 元素数据东西方向(即 x 方向)的分维数估计值 $\hat{D}_1 = 0.07$; Ag 元素数据南北方向(即 y 方向)的分维数估计值 $\hat{D}_2 = 0.17$ 。从而可知, Au 元素数据东西方向的分维数比 Au 元素数据南北方向的分维数大, 表明 Au 元素数据变化程度在东西方向比南北方向高, 即 Au 元

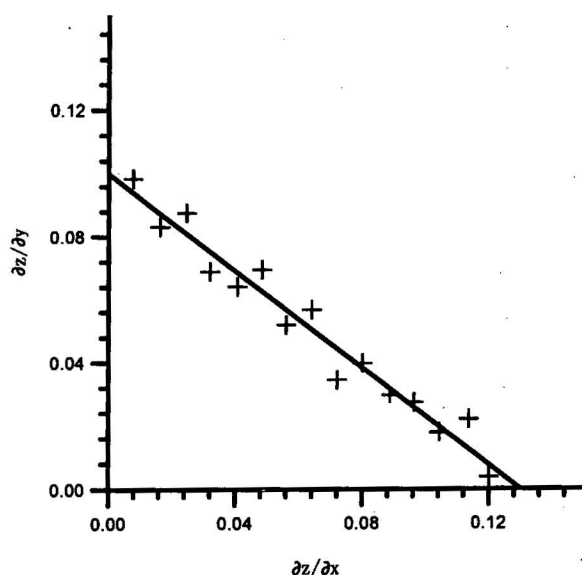


图1 胶东地区 Au 元素含量的 $\frac{1}{D_1} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{D_2} \frac{\partial z}{\partial y}$ 图

Fig. 1 Diagram of $\frac{1}{D_1} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{D_2} \frac{\partial z}{\partial y}$ of Au contents

in Eastern Shandong area

Au 元素数据分维数估计值 $\hat{D}_1=0.13$, $\hat{D}_2=0.10$

Calculated value of the fractal dimension for Au content,

$\hat{D}_1=0.13$, $\hat{D}_2=0.10$

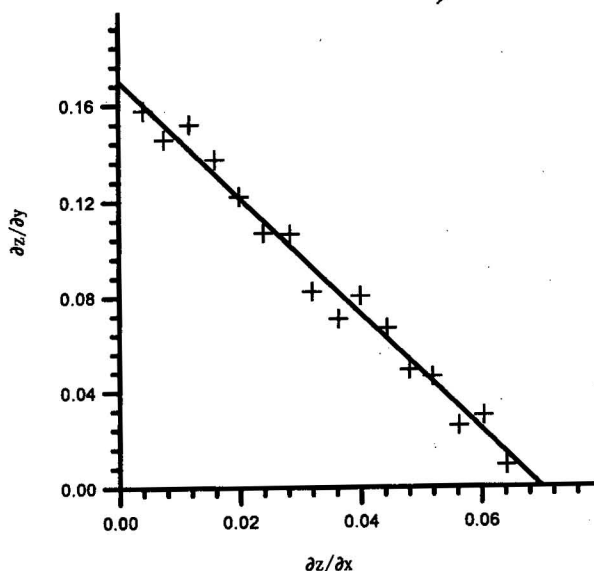


图2 胶东地区 Ag 元素含量的 $\frac{1}{D_1} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{D_2} \frac{\partial z}{\partial y}$ 图

Fig. 2 Diagram of $\frac{1}{D_1} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{D_2} \frac{\partial z}{\partial y}$ of Ag contents

in Eastern Shandong area

Ag 元素数据分维数估计值 $\hat{D}_1=0.07$, $\hat{D}_2=0.17$

Calculated value of the fractal dimension for Ag content,

$\hat{D}_1=0.07$, $\hat{D}_2=0.17$

高; Ag 元素数据南北方向的分维数比 Ag 元素数据东西方向的分维数大, 表明 Ag 元素数据变化程度在南北方向比东西方向高, 即 Ag 元素数据分布的不均匀程度在南北方向比东西方向高。分维数 D 可以作为金矿床类型、勘探类型、勘探网度和采样间距的参数。

4 结论

(1) 基于偏微分方程和分形理论, 提出了 n 维自仿射分形的检验与定量评定方法。

(2) 地球化学元素数据具有分形结构。

(3) 应用 n 维自仿射分形的方法研究地球化学金元素和银元素数据, 可知 Au 元素数据东西方向的分维数比 Au 元素数据南北方向的分维数大, 表明 Au 元素数据变化程度在东西方向比南北方向高, 即 Au 元素数据分布的不均匀程度在东西方向比南北方向高; Ag 元素数据南北方向的分维数比 Ag 元素数据东西方向的分维数大, 表明 Ag 元素数据变化程度在南北方向比东西方向高, 即 Ag 元素数据分布的不均匀程度在南北方向比东西方向高。分维数可以作为反映区域化变量在某方向变化程度的定量指标。该方法不仅适用于地球化学金元素和银元素数据, 而且还适用于其他元素和地质数据, 具有普遍的意义。

参 考 文 献

- 丁式江, 翟裕生, 邓军. 1998. 中国金矿床分布的分形研究. 地质论评, 44(2): 188~193.
- 孟宪国, 赵鹏大. 1991. 地质数据的分形结构. 地球科学, 16(2): 207~211.
- 秦长兴, 翟裕生. 1992. 矿床学中若干自相似性现象及其意义. 矿床地质, 11(3): 259~265.
- 申维. 2000. 信息维原理分析及在钻孔数据中的应用. 地质论评, 46(增刊): 343~346.
- 申维, 孙凤荣. 2003. 分形分布函数及其在大型矿床中的应用. 地球学报, 24(增刊): 263~240.
- 施俊法. 2000. 胶东金矿床的储量分形分布及地质意义. 地质论评, 46(增刊): 293~297.
- 周永章, Chown E H, 等. 1994. 地质热场中微量元素迁移的方向性和分维结构. 中国科学(B), 24(12): 1308~1313.

References

- Cheng Q, Agterberg F P, Ballantyne S B. 1994. The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods. Journal of Geochemical Exploration, 51: 109~130.
- Cheng Q, Agterberg F P. 1996. Multifractal modeling and spatial statistics. Mathematical Geology, 28: 1~16.
- Ding Shijiang, Zhai Yusheng, Deng Jun. 1998. Fractal analysis of gold deposit distribution in China. Geological Review, 44(2): 188~193(in Chinese with English abstract).

素数据分布的不均匀程度在东西方向比南北方向

- Foufoula-Georgiou E, Sapozhnikov V. 2001. Scale invariances in the morphology and evolution of braided rivers. *Mathematical Geology*, 33(3): 273~291.
- Hou Guiting. 1998. Fractal simulation and classification of folds. *Acta Geoscientia Sinica* (English Edition), 72(2): 217~223.
- Li Changjiang, Ma Tuhua, Zhu Xingsheng, Wang Guowu. 2002. Principle of mineral deposit size forecasting implication for gold resource potential evaluation in China. *Acta Geologica Sinica* (English Edition), 76(3): 378~386.
- Mandelbrot B B. 1983. The fractal geometry of nature. San Francisco; W. H. Freeman, 1~468.
- Meng Xianguo, Zhao Pengda. 1991. Fractal structure of geological data. *Earth Science*, 16 (2): 207~211 (in Chinese with English abstract).
- Qin Changxiang, Zhai Yusheng. 1992. Some self-similarities in economic geology and their significance. *Mineral Deposits*, 11 (3): 259~265 (in Chinese with English abstract).
- Sapozhnikov V, Foufoula-Georgiou E. 1995. Study of self-similar and self-affine objects using logarithmic correlation integral. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28: 1109~1112.
- Shen Wei. 2000. The applications of information dimension in drill hole data. *Geological Review*, 46 (Supp.): 343~346 (in Chinese with English abstract).
- Shen Wei, Zhao Pengda. 2002a. The theoretical study of statistical fractal model and its application in mineral resource prediction. *Computers & Geosciences*, 28(3): 369~376.
- Shen Wei, Zhao Pengda. 2002b. Multidimensional self-affine distribution with application in geochemistry. *Mathematical Geology*, 34(2): 109~123.
- Shen Wei, Sun Fengrong. 2003. Fractal distribution and its application to large-sized mineral deposits. *Acta Geoscientia Sinica*, 24 (Supp.): 236~240 (in Chinese with English abstract).
- Shi Junfa. 2000. Fractal distribution of the reserves of gold deposits in Jiaodong and its geological implication. *Geological Review*, 46

- (Supp.): 293~297 (in Chinese with English abstract).
- Turcotte D L. 1997. *Fractals and chaos in geology and geophysics* (2nd ed.). Cambridge; Cambridge Univ. Press, 1~398.
- Zhou Yongzhang. 1994. Orientation and fractal structure of trace element migration in geological thermal field. *Sciences in China* (Series B), 24(12): 1308~1313 (in Chinese).

附录: 名词简释

分形(Fractal): 物体的数目与其线性尺度之间存在着幂函数关系。或者说,分形是指物体的形状与其大小无关。

分维数(Fractal dimension): 分形关系中的幂函数的指数值。

标度不变性(Scale invariance): 指的是不论测量单位或观察的尺度如何改变,所观察和研究对象的性质(形态、结构、复杂程度和不规则性等)均不发生改变。换言之,在各种标度下,物体看起来都是一样的。

自仿射(Self-affine): 自仿射变换时不同的坐标方向标度变化是不同的。若在自仿射变换下,物体仍遵循标度律,则称该物体是自仿射的。

自相似(Self-similarity): 在一个标度下,一组点之间的几何结构与另一个标度时性质相同。

标度不变性(Scale invariance): 指的是不论测量单位或观察的尺度如何改变,所观察和研究对象的性质(形态、结构、复杂程度和不规则性等)均不发生改变。换言之,在各种标度下,物体看起来都是一样的。

自仿射(Self-affine): 自仿射变换时不同的坐标方向标度变化是不同的。若在自仿射变换下,物体仍遵循标度律,则称该物体是自仿射的。

自相似(Self-similarity): 在一个标度下,一组点之间的几何结构与另一个标度时性质相同。

统计分形(Statistical fractal): 自然界的许多事物和现象表现出极为复杂的形态,并非所显示的那样理想化。自相似性或标度不变性往往以统计方式表现出来,即当改变尺度时,在该尺度包含的部分统计学的特征与整体是相似的。统计分形是数学分形的一种推广。

n -Dimensional Self-affine Fractal and Its Application in Geochemistry

SHEN Wei

China University of Geosciences, Beijing, 100083

Abstract

The concepts of fractal have been used widely in the field of earth sciences for characterizing geological quantities and objects with self-similarity. It has been shown that fractal modeling often provides powerful tools for characterizing underlying spatial distribution structure of geological quantities and objects. This paper develops a method to test and quantitatively assess the presence of n -dimensional self-affine fractals and explains the method procedure of n -dimensional self-affine fractals in application and real meaning of fractal dimensions by examples. The fractal dimensions can be regarded as the quantity index to reflect the variety degree of region variable on certain direction. The method not only is applied to Au data and Ag data but also suited for other geochemical element data or geological data and has general meaning.

Key words: fractal dimensions; self-similarity; geochemical elements