

<http://www.geojournals.cn/georev/ch/index.aspx>

基于区域分解法的地下水有限元与边界元耦合模型

——淄博市王旺庄水源地地下水数值模拟

王浩然¹⁾ 朱国荣¹⁾ 赵金熙²⁾

1) 南京大学地球科学系, 210093; 2) 南京大学计算机科学系, 210093

内容提要 区域分解法(DDM)是20世纪90年代兴起的一种求解偏微分方程的新方法。方法本身独特的耦合思想和高效的并行计算机理,对于求解复杂的、大型的地下水问题具有相当的优势和广阔的应用前景。本文以淄博市王旺庄水源地地下水流模型为例,应用重叠型区域分解法(DDM)构造了边界单元法(BEM)与有限单元法(FEM)耦合模型,在两种数值方法各自优点的基础上,更形象地再现了实际水文地质原型,有效地消除了人为边界造成的流场失真。

关键词 地下水模拟 区域分解法(DDM) 边界单元法 有限单元法 耦合模型

就地下水运动的研究来说,有限单元法、有限差分法和边界单元法在求解由单一定解问题描述的地下水流模型方面是极具科学意义的。20世纪末以来,随着人们对地下水运动机理的新认识(薛禹群等,1997;刘建立等,2000;周念清等,2001),非达西流动、裂隙流动等问题(Kunio Watanabe et al., 1997)的研究成为全球水文地质学家的研究热点。目前,同时考虑孔隙流动和裂隙流动的地下水模型;在不远的明天,同时考虑达西流动和非达西流动的地下水模型,均需要新的数值模拟方法。本文的基本思想正是基于这一现实问题,应用学科交叉研究的优势,通过采用重叠型区域分解法(吕涛等,1999)求 BEM 和 FEM 耦合模型的原理为先导,研究地下水流数值模拟的新方法,最终寻求上述问题的解决方案。

有限单元法具有严密的数学推导和灵活处理非规则几何边界和系统输入/输出因子的优点(王浩然等,1999),但数据准备工作量非常大;边界单元法在处理非均质和非稳定流问题方面存在一定的困难,但其前处理工作量很小。本研究将利用并行耦合处理技术,在条件许可时充分发挥不同数值方法的优点开展地下水模拟。比如当需要进行重点研究的地区只是整个不可分割的地下水系统的一小部分时,就可以在需要重点研究的地段采用有限单元法处理,而非重点研究的外围地区则采用边界单元法解决,这两种模型的耦合除了比全部采用有限单元法

来模拟全区减少大量的工作量外,对原型的真实性再现是相当有效的。

1 重叠型区域分解法的基本原理

区域分解算法是20世纪80年代后期崛起的一种求解偏微分方程的新方法,其中,重叠型区域分解法(Overlapping DDM)是一种以 Schwarz 交替法为理论依据的区域分解算法。区域分解法具有把对复杂边值问题分解为简单边值问题求解、大型问题分解成一系列小型问题求解、串行问题分解成并行问题求解的能力。显然,当把计算区域分解为若干子域后,原问题的求解将转化为在子域上的求解,而对各子问题,就可采用适合于各子域的算法,或者重新构造各子域的定解问题进行求解。

例如,对于如图1所示的一个地下水流问题,我们先将其(区域 Ω)分解成两个子域 Ω_F 和 Ω_B ,其中 $AA'C'C$ 构成子域 $F(\Omega_F)$, $DD'B'B$ 构成子域 $B(\Omega_B)$, $DD'C'C$ 为两子域的重叠部分, CC' 构成了 Ω_F 的虚拟边界 Γ^{IF} , 而 DD' 构成了 Ω_B 的虚拟边界 Γ^{IB} 。若用 H 表示区域内的水头,由于 Γ^{IB} 同时也在 Ω_F 内,故在 CC' 上必定存在:

$$H\{\text{在 } \Gamma^{IB} \text{ 上}\} = H\{\text{在 } \Omega_F \text{ 内}\} \quad (1)$$

同理,在 DD' 上也必定存在:

$$H\{\text{在 } \Gamma^{IA} \text{ 上}\} = H\{\text{在 } \Omega_B \text{ 内}\} \quad (2)$$

本文为江苏省自然科学基金项目(编号 BK99022)的成果。

收稿日期:2002-03-02;改回日期:2002-08-05;责任编辑:章雨旭。

作者简介:王浩然,女,1975年生。2000年获南京大学硕士学位,现为南京大学水文学与水资源博士研究生。通讯作者:朱国荣,现为南京大学地球科学系教授。通讯地址:210093,南京大学地球科学系;电话:025-8646578;Email:gwflow@nju.edu.cn。

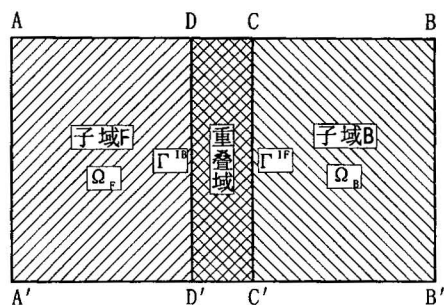


图 1 重叠型区域分解模型

Fig. 1 Overlapping domain decomposition model

区域 Ω 被分解后,我们必须为各子域的虚拟边界设定虚拟边界条件,然后通过交换各子域的计算水头进行迭代,使其满足形如(1)式和(2)式的条件,从而获得原问题的解。

2 地下水流 BEM 与 FEM 并行耦合模拟方法

针对以上的地下水流模型,若在 Ω_F 中采用有限元模型,而在 Ω_B 中采用边界元模型,则有如图 2 所示的耦合模型,图中位于 BEM 子域内部的空心圆结点同时又是 FEM 子域的虚拟边界(即图 1 中的 Γ^{IF})结点,而位于 FEM 子域中的正方形结点同时也是 BEM 的虚拟边界(即图 1 中的 Γ^{IB})结点。

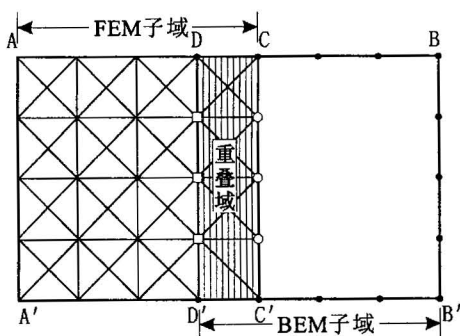


图 2 BEM 与 FEM 重叠型区域分解耦合模型

Fig. 2 Overlapping domain decomposition model for coupling BEM and FEM

耦合模型的具体求解方法如下:

(1) 设 Γ^{IB} 上的结点水头初值 $H_{B,0}^{IB}$ 。

(2) 对于 $n=0,1,2,\dots$, 求解 BEM 子域上的边界积分方程:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B^B \\ H_{B,n}^{IB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_B^B \\ q_{B,n}^{IB} \end{bmatrix} \quad (3)$$

获得 BEM 子域边界上的未知水头或流量;再解边界积分方程:

$$H_{B,n}^{IF} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B^B \\ H_{B,n}^{IB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* \\ d_{21}^* & d_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_B^B \\ q_{B,n}^{IB} \end{bmatrix} \quad (4)$$

求得 BEM 子域内部结点的水位值 $H_{B,n}^{IF}$, 即 Γ^{IF} 上的结点水头;再解 FEM 子域上的有限元离散方程:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_F^F \\ H_{F,n}^{IB} \\ H_{B,n}^{IF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_F^F \\ f_F^{IB} \\ f_F^{IF} \end{bmatrix} \quad (5)$$

可求得 FEM 子域内部结点水位值 $H_{F,n}^{IB}$, 即 Γ^{IB} 上的结点水头。

(3) 令 $H_{B,n+1}^{IB} = (1-\alpha)H_{B,n}^{IB} + \alpha H_{F,n}^{IB}$, 此处 α 为收敛因子;以 $n+1$ 代替 n , 重复步骤(2), 直到满足收敛条件:

$$\frac{|H_{B,n+1}^{IB} - H_{B,n}^{IB}|}{|H_{B,n+1}^{IB}|} < \epsilon$$

式中 ϵ 为给定的值。

此算法经证明是收敛的(Elleithy et al., 2000)。

该算法避免了二子域界面上 Neumann 条件的描述,是一种较简单的耦合算法。

另外,只要对该算法进行小的修改,便可进行并行计算(Vittoli et al., 1998)。具体而言,就是在步骤 1 中,同时假设 Γ^{IF} 上的结点水头初值,在步骤 2 中,将求解 BEM 子域上的边界积分方程与求解 FEM 子域上的有限元离散方程同步计算即可。显然,此算法是高度并行的。

3 应用实例

王旺庄水源地位于山东省淄博市淄河冲积扇中上部。冲积扇自南而北微微倾斜,展布面积超过 500 km²,其上发育的乌河为一季节性河流。钻孔揭露:该区含水层主要由卵石、砾石及中粗砂组成,呈多层结构,间夹粘土—砂质粘土层。含水层的层数由南部的 5~8 层增至北部的 7~10 层,累计厚度也相应由 23.99~39.46 m 增加到 37.22~50.59 m。对 8 个钻孔的单孔抽水试验表明:该区的渗透系数也由南部的 73.53~154.77 m/d 变化到北部的 48.62~76.47 m/d,但导水系数的总体变化在 1720~1780 m²/d 之间,含水层的平均导水性能相对比较均一,天然状态下,地下水运动呈微承压状态,自南向北流动。其数

学模型如下:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + R = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6)$$

1990年春,原冶金部山东冶金地质勘察局第一勘察队完成了本区的供水水文地质详察,本文笔者之一应邀对该区进行地下水资源评价,采用有限单元法建立了开采模拟模型(阎学义等,1998)。

必须指出:笔者原来建立的地下水开采模型是围绕该区的6眼新增水井(水₁~水₆)为中心的有限范围建立的,面积约25 km²。为了节省工作量,模拟中对边界条件,特别是对上下游边界按照第一类边界条件进行了比较牵强的处理,构不成完整的水文地质单元。一般情况下,数值模拟对于这种具有无限边界特征的处理方法是在一个足够远的、理论上不受开采影响的地方设置一模型边界。当然,模型边界的位置选择合适与否将直接影响着模拟结果,太小将产生较大的误差,大一些固然对计算有利,但其代价是增加巨大的前处理工作量。

在本问题中,原来确定的上下游边界是参照地下水影响半径进行的,这样处理在开采强度较小时不会有太大的问题,但当加大开采,影响半径将扩展到边界,此时边界作用占主导,这种人为造成的边界效应终将导致流场的严重失真。

对于王旺庄这样一个含水层的分布具有无限延伸特征且水文地质参数相对比较均一的地下水模型,应该尽可能把模型边界放到足够远的地方,才能减少模拟流场的失真(薛禹群等,1997)。当然,增加研究区的面积除了增加勘察投入外,数值模拟的前期准备工作量也势必增加很多。而本文所讨论的BEM与FEM耦合模拟方法,正是求解本区地下水模型的有效手段。

图3是按照BEM和FEM耦合模拟要求为本区建立的区域分解图,其中间部分为本次开采试验的重点研究地段,笔者将它设置为FEM区域(阎学义等,1998),剖分成288个三角形单元且考虑了水文地质的非均一特征(尽管是微弱的差异)以保证研究精度需求。必须指出的另一个问题是:增加开采后,开采中心约12 km²范围内的地下水将转化成无压流状态,此时数学模型为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial y} \right) + R = \mu \frac{\partial H}{\partial t} + Q_j \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (6)$$

而周边地区即为非重点研究区,且勘探精度较低,适合采用BEM方法对其进行求解,本研究中对研究

区的边界进行了扩充,最大扩充半径超过12 km,最小也不小于4 km,研究面积由原来的近25 km²增加到370 km²左右,试验表明:该区域在按供水需求开采状态下,地下水运动仍然满足如式(6)所示的数学表达。

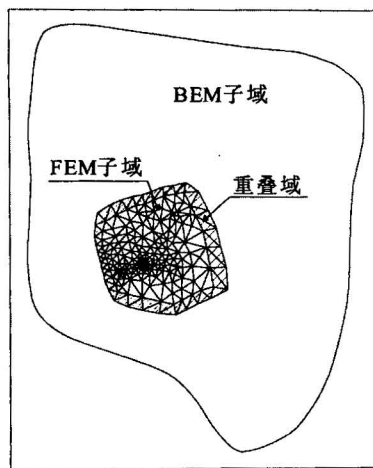


图3 王旺庄水源地的BEM与FEM分解模型

Fig. 3 Domain decomposition approach for coupling BEM and FEM model of Wangwangzhuang water source area

按照重叠区域分解法的要求,在FEM子域外围增加了一圈三角形单元(图3中带阴影的部分),以其外侧作为FEM子域的虚拟边界,而FEM原有的边界则成为BEM子域的内部虚拟边界。

图4为采用耦合模型模拟的第17个时段的地下水流场。时值3月23日,农业灌溉尚未开始,地下水的总体流向自南而北。开采试验的布局是:南部动用了3眼抽水井(水₁、水₂、水₃),总开采量为16530 m³/d,北部动用2眼抽水井(水₄和水₅),总开采量为9358 m³/d。开采试验的结果造成了南部地区3眼抽水井所在的局部降落漏斗,以薛家庄为中心的降落漏斗并没有封闭;北部由于抽水量较小,没有形成开采漏斗。不过南北两侧均不约而同地表现了影响边界的趋势,而尤以北边更甚。

图4所示的流场与笔者(阎学义等,1998)当年采用FEM方法模拟的流场相比,主要差别表现在南北两个边界附近。在笔者原来建立的那个FEM模型中,由于人为边界的影响,在南、北两个开采区形成了两处明显的降落漏斗群(阎学义等,1998)。而本次研究中将研究区的边界向外围扩展了很多,从而缓解了人为边界对流场的影响(薛禹群等,1997)。

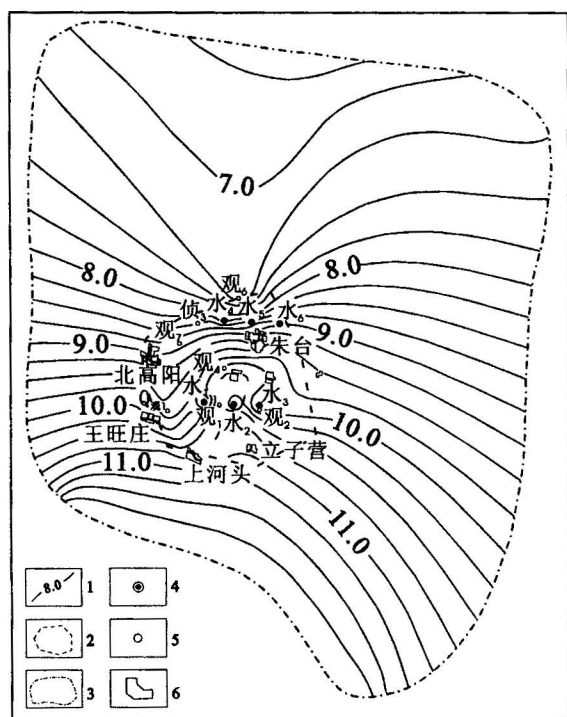


图4 BEM与FEM耦合模拟的地下水流场

Fig. 4 The groundwater contour map of BEM and FEM coupling model

- 1—地下水等势线; 2—重点研究区边界; 3—计算区边界;
4—开采井; 5—地下水动态观测孔; 6—村镇
1—Groundwater contour; 2—boundary of the main research
area; 3—boundary of the whole research area; 4—discharging
well; 5—groundwater observing well; 6—town

4 结论

(1) 基于区域分解法的地下水耦合模拟是一种高度并行的计算方法,其子问题的相对独立性决定了我们可以在一个大的地下水系统中同时进行各子单元(子域)的地下水流模拟,然后再依据各子单元间的水力联系特征耦合各子问题求得原问题的解。我国的华北地区、长江三角洲苏南地区的地下水系统研究均可采用本文介绍的方法。

(2) 本文利用区域分解法建立了王旺庄水源地地下水的BEM与FEM耦合模型,在较好地消除人为边界的影响的同时,更真实地模拟了当地的地下水流特征。其实,目前对裂隙系统中地下水运动的研究已取得较大的进展(Konio Watanabe et al., 1997),更有一批学者在对具有非达西流特征的地下水进行研究。利用本文阐述的方法,我们就有可能求解同一个地下水系统中的裂隙流和孔隙流、达西流与非达西流或者更复杂的边值问题。

(3) 本文介绍的方法是以一个地下水动力场为研究对象的,实际上该方法还可以应用到地下水溶质运移模型(朱学愚,1990)和温度场等模型中。

参 考 文 献

- 刘建立,朱学愚,钱孝星. 2000. 中国北方裂隙岩溶水资源开发和保护中若干问题的研究. 地质学报, 74(4): 344~352.
吕涛,石济民,林振宝. 1999. 区域分解算法——偏微分方程数值解新方法. 北京: 科学出版社.
王浩然,朱国荣. 1999. 构造断裂发育地区的地下水流模拟. 南京大学学报, 35(3): 323~329.
薛禹群,吴吉春. 1997. 地下水数值模拟在我国——回顾与展望. 水文地质与工程地质, (4): 21~24.
阎学义,朱国荣,王浩然. 1998. 淄博市晴纶工程水源地地下水开采预测的数值模拟. 高校地质学报, 4(2): 198~204.
周念清,钱家忠,吴剑锋,朱学愚. 2001. 中国北方岩溶区优势面控水机理及优势参数的确定与应用. 地质论评, 47(2): 151~156.
朱学愚,谢春红. 1990. 地下水运移模型. 北京: 中国建筑工业出版社.

References

- Elleithy W M, Al-Gahtani H J. 2000. An overlapping domain decomposition approach for coupling the finite and boundary element methods. Engineering Analysis with Boundary Elements, 24: 391~398.
Kunio Watanabe, Yokito Sugimura, Yutaka Morita, Tatsuya Tanaka. 1997. Channel network modelling of the fractured granite in the Hinachi area, Japan. Earthquake Proof Design and Active Faults, 247~262.
Liu J L, Zhu X Y, Qian X X. 2000. Study of some problems on the development and protection of fracture-karst water resources in North China. Acta Geologica Sinica, 74(4): 344~352 (in Chinese with English abstract).
Lü T, Shi J M. 1999. Domain decomposition methods——New numerical techniques for solving PDE. Beijing: Science Press (in Chinese with English abstract).
Vittoli C, Wilders P, Manzini M, Fotia G. 1998. Distributed parallel computation of 2D miscible transport with multi-domain implicit time integration. Simulation Practice and Theory, 6: 71~88.
Wang H R, Zhu G R. 1999. Simulation of groundwater flow in the faults area. Journal of Nanjing University, 35(3): 323~329.
Xue Y Q, Wu J C. 1997. Groundwater numerical simulation in China——Review and prospect. Hydrogeology and Engineering Geology, (4): 21~24 (in Chinese).
Yan X Y, Zhu G R, Wang H R. 1998. Numerical simulation for predicted pumping of groundwater resource in Zibo nylon project, Shandong. Geological Journal of China Universities, 4(2): 198~204 (in Chinese with English abstract).
Zhou N Q, Qian J Z, Wu J F, Zhu X Y. 2001. The controlling mechanism of the preferred plane on groundwater flow and the determination and application of preferred parameters in the karst area in north China. Geological Review, 47(2): 151~156 (in Chinese with English abstract).
Zhu X Y, Xie C H. 1990. Modeling of transport in subsurface flow. Beijing: China Architecture & Building Press (in Chinese).

A Groundwater Flow Domain Decomposition Model Coupling the Boundary and Finite Element Methods

—A Groundwater Numerical Simulation of the Wangwangzhuang Water Source Area of Zibo City

WANG Haoran, ZHU Guorong, ZHAO Jinxi

Department of Earth Sciences, Nanjing University, Nanjing, 210093

Department of Computer Sciences & Technology, Nanjing University, Nanjing, 210093

Abstract

The domain decomposition method (DDM) is a new method that sprung up in the 1990s for solving the partial differential equation. It has its advantages and wide application perspectives for solving complicated and large-scale groundwater problems in view of the unique combined method and high-effective parallel computing theory in itself. A groundwater flow model of the Wangwangzhuang water source area of Zibo City is presented in this paper. In this model, a coupling of the boundary element method (BEM) and the finite element method (FEM) is made through the overlapping iterative domain decomposition method (DDM), which makes use of their advantages and shows an excellent agreement between the groundwater simulation and the real hydrogeological conditions, and effectively eliminates the distortion of the groundwater flow field caused by the artificial boundary.

Key words: groundwater simulation; domain decomposition method; boundary element method; finite element method; coupling model