

<http://www.geojournals.cn/dzxb/ch/index.aspx>

偏微分方程数值解法在地学应用 中的对比分析

张 宏 仁

(中华人民共和国地质矿产部, 北京)



在地学中广泛应用的偏微分方程数值解法有两种: 有限差分法及有限单元法。对于定常态问题两种方法完全等价, 对于非定常态问题有限单元法形成的代数方程归根到底仍是有限差分方程, 但在一定条件下会引起反常问题, 原因是与代数组相容的不是原来的热传导方程, 而是反热传导方程。

关键词 偏微分方程 热传导方程 数值解法 有限差分法
有限单元法

1 前言

与地质学有关的许多现象和过程都可以用二阶偏微分方程来概括。静电场、磁场、恒稳电流场、稳定温度场和地下水渗流场等稳定场问题及岩土力学中的平衡问题, 可以用椭圆型偏微分方程如拉普拉斯方程或泊松方程等来概括。而上述各种场瞬态的变化, 包括石油、天然气贮藏开采动态变化及地下水动态变化可以用热传导方程来概括。

对于数值解法来说, 只要把热传导方程的数值解法分析清楚了, 拉普拉斯方程及泊松方程的数值解法也就好处理了。本文将以孔隙介质中的渗流问题为例, 把数学模型与物理模型结合起来说明该方法在地下水、石油、天然气贮藏层动态模拟中的重要实用价值。二维非稳定渗流方程为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

式中: h —水头; T —导水系数; S —贮水系数

有限差分法曾是解二阶偏微分方程占统治地位的数值方法。近二、三十年, 有限单元法受到越来越多的注意, 被认为是本世纪最有影响的数值方法, 并大有取代有限差分法之势。不幸的是, 这种趋势的发展并不是基于对两种数值方法理论上的对比分析, 而更多的是出于对有限单元法中广泛使用的比较灵活的网格的爱好, 以及对复杂而抽象的数学推导所产生的数值方法的期望。

笔者从 1977 年以来曾就有限单元法与有限差分法的对比发表过若干篇文章^{[1-3]1)}, 要正确使用并发展数值方法, 有必要从根本上阐明两种方法的相对优缺点。

2 对比的准则

长期以来, 没有对有限单元法与有限差分法的对比作出明确的结论, 主要是两方面的原因造成的:

1. 有限差分法长期以来沿用方格网, 而有限单元法从一开始就采用了三角形等灵活的网格。对两种不同网格生成的代数方程组, 难以比较它们的异同。

2. 在数值方法的推导上, 有限差分法采用“由点到面”的方法, 有限单元法则是“由面到点”的方法。要从数学推导过程对比两种方法也是很困难的。

为了对有限单元法和有限差分法作出正确的对比分析, 应当遵循以下原则:

1. 采用相同的网格。由于三角形既是有限单元法最常用的单元形状, 又是有限差分法能够采用的网格, 故决定以三角形网格作为方法对比的标准网格。

2. 以线性代数方程组作为对比的主要对象。有限单元法和有限差分法最后得到的线性代数方程组都可概括为以下形式的矩阵方程

$$[C]\{h\} + \{Q\} = [D] \left\{ \frac{dh}{dt} \right\} \quad (2)$$

所以可以把两种方法的对比归结为矩阵 $[C]$ 和 $[D]$ 的对比。

3 曲线边界问题

偏爱有限单元法的人, 大部分是由于有限单元法采用了比较灵活的网格, 适于处理曲线边界, 并可在区域内随意地加密或放稀网格。而传统习惯上采用方格网的有限差分法则不具有这种优点。

事实上在有限差分法中, 早就有人建议采用不规则三角形网格。如 1949 年 G. M. Dusenberre^[4] 就曾指出不规则三角形网格在一定条件下用起来比较方便。他当时不仅发现了三角形几何量的余切关系, 而且对边界单元作了合理的, 与后来发展起来的三角形有限单元法相似的处理。1953 年 R. H. MacNeal^[5] 对不规则三角形网格有限差分法作了系统而详尽的论述, 为不规则三角形有限差分网格打下了很好的基础。1963 年 H. N. Tyson 和 E. M. Weber^[6] 用 R. H. MacNeal 推导的不规则三角形网格模拟了洛杉矶滨海平原的地下水含水层的动态变化。美中不足的是他们没有注意到前人早已发现的余切关系, 而在几何量的输入上采用了完全手工的操作。

从以上对有限差分法发展历史上几个片断的追忆可以看出, 早在 40 多年前就有人在有限差分法中采用了不规则三角形网格, 并已认识到这种网格在处理曲线边界及调整结点密度方面的灵活性。

4 与拉普拉斯算子相对应的部分

前面提到, 有限差分法与有限单元法的对比归结为矩阵方程 (2) 中矩阵 $[C]$ 和 $[D]$ 的

1) 张宏仁. 有限单元法与有限差分法的对比分析. 北京市地质局水文一大队内部油印稿. 1977.

对比。下面我们先从与偏微分方程(1)中拉普拉斯算子 $\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$ 相对应的[C]矩阵的对比开始。

早在有限单元法刚被引入地下水渗流问题时许多人就已发现,在方格网的情况下,用两种方法逼近拉普拉斯方程,得到完全相同的结果。如 I. Remson^[7] 1971 年在用与方格网结点分布相同的直角三角形单元进行了繁琐的推导后发现,对于拉普拉斯方程,用有限单元法得到的代数方程与有限差分近似方程完全一样。

1977 年,笔者从两种方法处理几何量时共有的余切(cotangent)关系中发现,即使使用三角形网格(或单元),两种方法处理拉普拉斯算子得出的也是完全相同的线性代数表达式,即[C]矩阵完全相同。

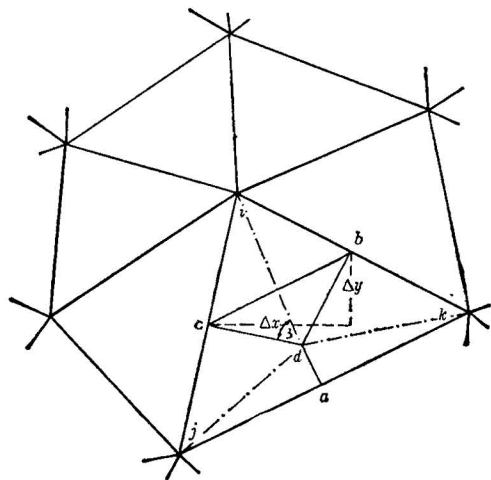


图 1 不规则三角形网格

Fig. 1 Irregular triangular network

图 1 是不规则三角形网格的一部分。用三角形各边的垂直二等分线作为划分各结点均衡子区域的分界线,这样图中加了细点的面积就是结点的子区域。三角形 ijk 各边垂直二等分线相交于 d 点,因此 d 点是三角形外接圆的圆心。

先考虑各向同性的情况,在三角形 ijk 中从 j 及 k 两个子区域流入 i 子区域的地下水流量按达西定律分别为

$$Q_{ji} = T \cdot cd \cdot \frac{h_j - h_i}{ij}$$

$$Q_{ki} = T \cdot bd \cdot \frac{h_k - h_i}{ik}$$

对于孔隙介质中的渗流问题来说,参数 T 是给定的, h_i 、 h_j 、 h_k 是待求未知数,而 cd 、 bd 、 ij 、 ik 等线段长度是仅与结点平面坐标有关的几何量。然而我们并不需要这些几何量本身,对于数值计算来说只要有线段的比值 cd/ij 、 bd/ik 等就够了。由于 $\angle 3 = \angle k$

$$cd/ij = \frac{cd}{2ic} = \frac{1}{2} \cotg \angle 3 = \frac{1}{2} \cotg \angle k$$

$$\text{同理: } \frac{bd}{ik} = \frac{1}{2} \cotg \angle j$$

于是,对于三角形 ijk 来说,从周围流入 i 结点子区域的地下水流量差分方程表达式可写成以下形式

$$Q_{ji} + Q_{ki} = -\frac{T}{2} [(\cotg \angle j + \cotg \angle k) \cdot h_i - \cotg \angle k \cdot h_j - \cotg \angle j \cdot h_k] \quad (3)$$

若对同样的三角形网格采用有限单元法。则在各向同性的条件下,相应部分的线性代数表达式为:

$$-\frac{T}{4\Delta} [(b_i^2 + c_i^2)h_i + (b_i b_j + c_i c_j)h_j + (b_i b_k + c_i c_k)h_k] \quad (4)$$

其中: Δ 为三角形 ijk 的面积; $b_i = y_j - y_k$, $b_j = y_k - y_i$, $b_k = y_i - y_j$; $c_i = x_k - x_j$, $c_j = x_i - x_k$, $c_k = x_j - x_i$ 早在 70 年代初人们就发现¹⁾以下简单的关系

$$\frac{b_i^2 + c_i^2}{4\Delta} = \frac{1}{2} (\text{ctg} \angle j + \text{ctg} \angle k)$$

$$\frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta} = -\frac{1}{2} \text{ctg} \angle k$$

$$\frac{b_i b_k + c_i c_k}{4\Delta} = -\frac{1}{2} \text{ctg} \angle j$$

将以上关系代入表达式 (4) 得到

$$-\frac{T}{2} [(\text{ctg} \angle j + \text{ctg} \angle k) \cdot h_i - \text{ctg} \angle k \cdot h_j - \text{ctg} \angle j \cdot h_k]$$

与式 (3) 右侧的表达式完全相同。

在各向异性条件下, 用有限单元法生成的线性代数方程中相当于拉普拉斯算子部分的表达式具有以下形式

$$-\frac{T_{xx}}{4\Delta} (b_i^2 h_i + b_i b_j h_j + b_i b_k h_k) - \frac{T_{yy}}{4\Delta} (c_i^2 h_i + c_i c_j h_j + c_i c_k h_k) \quad (5)$$

用有限差分法, 流入子区域的流量就是通过断面 bdc 折线的流量。由于无论有限单元法还是有限差分法都把源——汇项加在结点上, 故线积分与路程无关, 越过折线 bdc 的流量等于越过直线 bc 的流量。如果将水流矢量分解为 x, y 方向的分量则总流量的表达式为

$$T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \Delta y_{bc} - T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x_{bc} \quad (6)$$

而由图 1 可见: $\Delta x_{bc} = -\frac{1}{2} c_i$, $\Delta y_{bc} = -\frac{1}{2} b_i$ 。只需找出三角形 ijk 上沿 X , 及 Y 方向水头梯度的表达式即可求出总流量的表达式。

传统的有限差分法只定义沿结点间的连线方向上水头是线性变化的, 并未显式地说明整个三角形面积上水头是如何变化的。由于两条相交的直线决定一个平面, 有限差分法的水头定义方式与有限单元法三角形为水头平面的定义方式并不矛盾, 故也可以用解析几何中的线性插值关系。平面三角形 ijk 中任一点 (x, y) 的水头为

$$h(x, y) = A + Bx + Cy。$$

由于已知

$$h_i = A + Bx_i + Cy_i; h_j = A + Bx_j + Cy_j; h_k = A + Bx_k + Cy_k$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = B = \frac{1}{2\Delta} (b_i h_i + b_j h_j + b_k h_k)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = C = \frac{1}{2\Delta} (c_i h_i + c_j h_j + c_k h_k)$$

其中 Δ 为三角形面积。

将以上两式代入表达式 (6) 得

1) 吴嘉瑞. 有限单元法. (油印稿). 1975.

$$-\frac{T_{xx}}{4\Delta}(b_i^2 h_i + b_i b_j h_j + b_i b_k h_k) - \frac{T_{yy}}{4\Delta}(c_i^2 h_i + c_i c_j h_j + c_i c_k h_k)$$

与有限单元法得到的表达式也完全相同。

至此,我们已针对方格网及不规则三角形网格,证明了有限差分法及有限单元法在处理拉普拉斯算子时的完全等价性。

以上对比告诉我们:对于拉普拉斯方程和泊松方程,有限单元法和传统的有限差分法实际上是一种方法,只是推导的途径不同而已。对于热传导方程中的拉普拉斯算子,两种方法得到完全相同的表达式。但在处理热传导方程右侧的储量项,即时间导数项时,得到的 $[D]$ 矩阵却不一样。

5 储量项

用有限差分法得的与时间导数相关的项,即 $[D]$ 矩阵是对角线矩阵,而用有限单元法得到的 $[D]$ 矩阵,除主对角线外尚有与周围结点相应的元素,因而其结构与 $[C]$ 矩阵相同。70年代一些人通过试算比较两种方法,发现有限单元法的 $[D]$ 矩阵会引起水头反常问题,但对出现反常水头的原因未能找到令人满意的解释,只好人为地使 $[D]$ 矩阵对角线化。然而,把储量集中起来的结果几乎完全消除了两种方法解热传导方程上的差别。笔者于1984年曾找到了反常水位出现的临界点,但不久前^[3]才发现了问题的症结所在。

为了便于分析有限单元法形成的矩阵方程,把网格简化为规则的等边三角形单元,三角形边长为 L 。假设含水层均质,各向同性。边长各为10格的正六边形区域的边界为定水头边界。初始水头为0。从 $t=0$ 开始在正中心结点上突然加一个定强度的源, Δt 取得使 $\frac{L^2 S}{T \Delta t} = 4$ 。不同时段的结果见表1。

表1 边长为10格的正六边形区试算结果

Table 1 Trial calculation results of a hexagon with each side being 10-node long

时段 \ 距中心步长	0	1	2	3	4	5
1	0.34858	-0.03271	0.00277	-0.00021	0.00001	-0.00000
2	0.52535	-0.01557	-0.00122	0.00024	-0.00002	-0.00000
3	0.63033	0.01216	-0.00414	0.00041	-0.00004	0.00000
4	0.70108	0.03943	-0.00470	0.00019	0.00000	-0.00000
5	0.75325	0.06361	-0.00335	-0.00021	0.00005	-0.00001
6	0.79408	0.08454	-0.00075	-0.00057	0.00007	-0.00001
7	0.82737	0.10266	0.00257	-0.00079	0.00005	-0.00000
8	0.85528	0.71845	0.00626	-0.00081	0.00000	0.00001
9	0.87917	0.13233	0.01012	-0.00065	-0.00006	0.00001

在现实含水层中,若在中心突然加一个源(如一个注水井开始注水),则周围水位应跟着上升。有限差分法模型所描绘的图景在总的趋势上与现实是一致的。但有限单元法,当 Δt 值较小时,在源点周围的结点上开始水位不仅不上升,反而下降。向外一层结点上,水位呈现上升,再向外一层结点上,水位又复下降……。出现了水位振荡。但这种振

荡与显式差分格式不稳定时出现的振荡不同,不会增幅,而是逐渐衰减并趋于正常。

为便于分析,从正六边形网格中任意拿出6个三角形来编号如图2。结点0周围子区域的边长为 $L/\sqrt{3}$ 。三角形面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ 。结点0子区域的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}L^2$ 。

在差分格式中以隐式最简单而且绝对稳定,故这里对有限差分法和有限单元法都采用全隐式。对结点0可得到以下形式的差分方程

$$\frac{T}{\sqrt{3}} \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + Q_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{L^2 S}{\Delta t} (h_0^{n+1} - h_0^n)$$

令 $\theta = \frac{L^2 S}{8T\Delta t}$ 并将上式各项均除以 $T/\sqrt{3}$, 最后得

$$\left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + \frac{\sqrt{3} Q_0}{T} = 12\theta (h_0^{n+1} - h_0^n) \quad (7)$$

若用有限单元法,则对每个三角形可得到以下形式的代数方程

$$\sum_{p=1}^6 \frac{-T}{4\Delta} \{ (b_i^2 + c_i^2) h_i^{n+1} + (b_i b_j + c_i c_j) h_j^{n+1} + (b_i b_k + c_i c_k) h_k^{n+1} \} \\ + \frac{Q_0}{6} = \sum_{p=1}^6 SA \left(\frac{1}{6} \frac{dh_i}{dt} + \frac{1}{12} \frac{dh_j}{dt} + \frac{1}{12} \frac{dh_k}{dt} \right)$$

由于

$$b_i^2 + c_i^2 = L^2; \quad b_i b_j + c_i c_j = -L^2/2; \quad b_i b_k + c_i c_k = -L^2/2$$

对于结点0,将周围6个三角形的方程组合在一起,得

$$\frac{T}{\sqrt{3}} \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + Q_0 = \frac{\sqrt{3}}{24} \frac{L^2 S}{\Delta t} \left\{ \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} + 6h_0^{n+1} \right) - \left(\sum_{p=1}^6 h_p^n + 6h_0^n \right) \right\}$$

各项均除以 $T/\sqrt{3}$ 并令 $\theta = \frac{L^2 S}{8T\Delta t}$ 得

$$\left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + \frac{\sqrt{3} Q_0}{T} = \theta \left\{ \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} + 6h_0^{n+1} \right) - \left(\sum_{p=1}^6 h_p^n + 6h_0^n \right) \right\} \quad (8)$$

对比左右两侧不难看出,矩阵[C]和矩阵[D]除了主对角线正负号相反外完全一样。第一步先改造[D]

$$\left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + \frac{\sqrt{3} Q_0}{T} = \theta \left\{ \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) \right. \\ \left. - \left(\sum_{p=1}^6 h_p^n - 6h_0^n \right) + 12(h_0^{n+1} - h_0^n) \right\}$$

再将[D]的一部分与[C]合并,最后得到

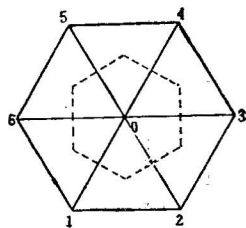


图2 正六边形网格

Fig. 2 Regular hexagonal network

$$(1 - \theta) \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + \theta \left(\sum_{p=1}^6 h_p^n - 6h_0^n \right) + \frac{\sqrt{3} Q_0}{T} = 12\theta(h_0^{n+1} - h_0^n) \quad (9)$$

式(9)与用有限差分法得到的式(8)相比可看出,两式基本相同,所不同的是有限差分法形成的全隐式侧向流量差分表达式,在有限单元法中被分解为隐式和显示两部分,其权值分别为 $(1 - \theta)$ 及 θ 。尽管推导有限单元法代数方程是从全隐式出发的,但最终得到的却是隐式与显式的混合表达式。如果一开始采用中心差分的 Crank-Nicolson 格式,则显式部分比重还要加大。隐式与显式部分的权值将分别为 $(1/2 - \theta)$ 及 $(1/2 + \theta)$ 。

以上推导向我们揭示了一个重要事实,虽然经过了繁琐的,物理意义很不直观的推导,有限单元法形成的代数方程仍然是差分方程,而且是隐式差分格式与显示差分格式的复合格式,在式(9)中,当 $\theta = 1$,左侧第一项消失,成为全显式的有限差分格式。当 $\theta = \frac{1}{2}$,隐式与显式各占一半,成为中心差分格式,或 Crank-Nicolson 格式。具有较高的二阶精度。当 $\theta \rightarrow 0$,显式部分比重小到可忽略不计,实质上成为全隐式的差分格式。具有最好的稳定性。

以上3种都是典型的最常用的差分格式。关于它们的误差、收敛性、稳定性、相容性都被相当透彻地研究过。整个 $0 < \theta \leq 1$ 的范围都属于正常差分格式的范围。

然而常规有限差分格式中 θ 是给定的,而用有限单元法形成的差分方程 θ 是可变的。

从 θ 的定义 $\theta = \frac{L_2 S}{8T \Delta t}$ 可看出,随着网格、时间、含水层参数的变化, θ 也跟着变,使用户无法控制。例如随着 Δt 的增大, θ 由大变小,稳定性逐步提高。而在 θ 由1向0减少时精度逐渐提高,到 $\theta = 1/2$ 时最高,随后又逐渐降低。

大多数有限单元法的用户以为采用 Crank-Nicolson 格式可以提高精度,其实不然。实际得到的隐式部分和显式部分比重并不是各占一半,而分别为 $\left(\frac{1}{2} - \theta\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2} + \theta\right)$ 。只有当 Δt 很大, θ 与 $1/2$ 相比小到可忽略不计时数值才接近 $1/2$,而一般情况下总是显式部分占的比重大。

在上述 θ 取值范围内,有限单元法形成的差分方程在使用上尽管有缺点,但还是能工作的。因为它们都没有越出有限差分法 $0 \leq \theta \leq 1$ 的限制。然而用有限单元法,若 Δt 小到使 θ 大于1时就超出了有限差分法的取值范围。这时隐式部分的权值变成负的,显式部分的权值则大于1。这是在有限差分法中从未有人自觉地使用过的格式,相当长一段时间以来却被有限单元法的用户不自觉地使用着。反常水位正是由它引起的。

多数情况下,负的隐式部分与大于100%的显式部分互相抵消,虽然不好用,但这种格式还是能工作的。然而如果在一个初始流场近于稳定的无源区域突然加上一个强刺激(源或汇),就会出现反常现象。

由于初始流场近于稳定而且无源,显式部分小到可忽略不计。隐式部分则由于突然加入的强刺激而急剧增大。式(9)可近似地简化为

$$(1 - \theta) \left(\sum_{p=1}^6 h_p^{n+1} - 6h_0^{n+1} \right) + \frac{\sqrt{3} Q_0}{T} = 12\theta(h_0^{n+1} - h_0^n) \quad (10)$$

由于 $\theta > 1$,左侧乘数为负数。与这个差分方程相对应的偏微分方程是

$$-T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + q = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

用于描述渗流过程的热传导方程,变成了“反热传导方程”,它的含义是:“如果一个区域地下水收大于支,则地下水位应当下降”。这当然是违背质量守恒原理的。

反常水位的“病根”正好在这里。如果一个结点上的水位因注水而突然上升,则旁边的结点上水位不是跟着上升,而是下降。这正是我们在表 1 中所看到的现象。

为什么这种反常的水位振荡不会扩大,而会逐渐衰减呢?从式(9)中也可以找到答案。因为从下一个时段开始,不再有接近平衡的初始水位,显式部分不能再被忽略不计,“反热传导方程”恢复到“热传导方程”,也就不再会继续反常了。此外,渗流、热传导是渐趋平缓的过程。在强刺激作用的初期,水位变化快,需要缩小时段长度 Δt 。随着时间流逝,水位变化越来越慢,为了减少不必要的计算工作量,通行的作法是逐步放大 Δt ,而随着 Δt 的加大, θ 减到小于 1,即回到有限差分法正常的取值范围内。反常水位将不再出现。如果在有限单元法中对时间导数采用中心差分,则只要 $\theta > \frac{1}{2}$ 就会出现反常水位。

总之,在渗流或热传导问题中,有限单元法形成的 $[D]$ 矩阵不仅没有带来好处,而且有不少毛病,特别是当 Δt 较小时出现反常水位。

前面的推导虽然是以等边三角形为基础,而且假设含水层均质、各向同性,但所有结论可以推广到更一般的不规则三角网格,乃至曲线边,高次单元,含水层非均质、各向不同性的情况中去。这是由于在任何条件下, $[D]$ 矩阵的结构与 $[C]$ 矩阵的结构总是一样的。可以用相同的办法把它们合并。不同的是在一般情况下不再会有统一的 θ 值,从而使反常水位出现的条件不再有一个截然的分界线。但总的趋势不会有大的出入,即当 Δt 小到一定程度,在近于平衡的地区突然加上一个刺激,就会出现反常水位。这已被许多人的试算所证明。

6 对有限差分法的改进

有限单元法的发展进程中采用了一些好的做法。这些做法其实与有限单元法并无本质的联系,有限差分法可以很方便地拿过来用。

首先,不规则三角形网格有限差分法可以借用为有限单元法建立的求几何量的一套办法。我们已证明了它们是有限差分法中多边形边长与结点间距之比。只要有了结点座标,就可以自动求出这些比值。从 1977 年以来我们一直顺利地使用着这套自动化的办法,多边形面积也可以自动求出来。

有限差分法的传统作法把参数定义在结点上。在计算侧向流量时,实际需要的是结点子区之间分界线上的导水系数,于是不得不用各种方法求出结点间的“平均导水系数”。这种作法导致在模拟二类边界时不得不设虚拟结点,从而破坏了矩阵的对称性。有限单元法采用的把参数定义在“单元”面积上的作法更为合理。此外,对于区域内部参数有突变的情况,以及各向不同性的处理,把参数定在面积上也比定在结点上要好。

在有限差分法中,把参数的定义由结点改到面上是很容易的事。对三角形网格可以定义在三角形内,对方格网则可定义在方格内,只需对程序作不大的改动。但这样一来,

矩阵就变成对称正定的了,对处理内部参数突变界限及二类边界都很有利。

7 结论

1. 对于拉普拉斯方程及泊松方程,有限差分法与有限单元法是完全等价的。它们不是两种不同的数值方法,而仅仅是两种不同的推导方法。凡是用有限单元法语言推导起来比较直观的问题,仍用有限单元法的一套推导方法较方便,如弹性力学中的平衡问题。凡是用守恒原理推导起来比较直观的问题,如渗流、热传导等,还是用有限差分法推导为好。

2. 对于热传导方程,用有限单元法推导出来的代数方程,实质上是有严重缺陷的差分方程,在一定条件下会给出反常的势(温度或水位)。使储量矩阵对角线化虽可消除反常现象,但却又使有限单元法与有限差分法完全等同起来。

3. 有限差分法应当吸取有限单元法的一些好做法,如把参数定义在单元上而不是结点上,以改变传统作法中不合理的方面。

参 考 文 献

- 1 张宏仁,李俊亭. 有限差分法与有限单元法在渗流问题中的对比. 水文地质工程地质,1979,(2): 50—56.
- 2 张宏仁,解渗流问题数值方法对比. 水文地质工程地质,1984,(4): 23—29.
- 3 张宏仁. 有限单元法的水头反常问题. 水文地质工程地质,1992,(5): 22—24.
- 4 Dusenberre, G M. Numerical Analysis of Heat Flow. McGraw-Hill, 1949: 78—81.
- 5 MacNeal, R. H. An Asymmetric Finite Difference Network. Quart. Appl. Math, 1953, 11: 295—310.
- 6 Tyson, H N, Weber E M. Groundwater Management for the Nations Future-Computer Simulation of Ground Water Basins. J. Hydraul. Div. Amer. Soc. Civil Eng. 1964, 90 (Hy4): 198—216.
- 7 Remson I, Hornberger G M, Molz F J. Numerical Methods in Subsurface Hydrology. Wiley-Interscience. 1971: 327—331.

A COMPARATIVE STUDY OF NUMERICAL SOLUTION OF PDE IN GEOSCIENCES

Zhang Hongren

(Ministry of Geology and Mineral Resources, Beijing)

Abstract

A number of phenomena and processes in geosciences can be summarized by second order partial differential equations. The major numerical methods for their solution include the classical finite difference method and the finite element method newly developed in the past two decades. Since 1977 the author has proved that for Laplace and Poisson equations, these two methods are identical, and they are different only in the process of formulation. For transient problems, such as heat conduction in the earth and groundwater and oil-gas unsteady flow in porous media, there are some differences in resulting linear algebraic equations. In general, two methods give similar results, but when time step is decreased to some extent, the resulting algebraic equations will be consistent with the anti-heat conduction equation rather than the original heat conduction equations. This is the reason why unrealistic potentials are produced by the finite element method. Such a problem can be overcome by using the lumped mass procedure, but it makes two methods identical again.

To improve the traditional finite difference method, it is quite desirable and convenient to introduce the common practice of the finite element method to define the parameters in elements rather than on nodes.

Key words: partial differential equation, numerical solution, finite element method, finite difference method

作者简介

张宏仁, 1934年生。1959年毕业于乌克兰德聂泊尔彼得罗夫斯克矿业学院地质系。1959—1962年在云南从事矿产勘查工作, 1962—1970年在地质部从事特种非金属及稀有金属矿产地质工作, 1970—1982年在北京从事地下水资源及地热资源评价工作, 1982年至今在地质矿产部从事地质技术管理工作。现任中国地质矿产部副部长, 教授级高级工程师, 中国地质学会理事长。通讯地址: 北京阜内大街64号地质矿产部。邮政编码: 100812。