

<http://www.geojournals.cn/dzxb/ch/index.aspx>

倒转褶皱的粘性流体有限元分析*

兰腊保 王 仁

(北 京 大 学)

本文采用有限元方法,分析单层对称褶皱作用和一个天然倒转褶皱的变形过程。分析中假设材料是各向同性和不可压缩的理想牛顿流体,并采用罚函数方法处理体积不可压缩问题。把有限元计算的结果与野外实测数据和弹塑性有限元的结果进行比较,表明粘性流体有限元方法,能较好地模拟倒转褶皱的几何形态,据此提出了倒转褶皱的一种可能的形成机制。

一、引 言

地壳上存在的各种各样的褶皱构造,均是岩石发生永久变形的产物,而这些褶皱了的岩层中,必然包含着地质历史中岩石变形的许多重要信息。为了获得这些信息,可以采取各种手段对褶皱变形进行研究。在野外对褶皱几何形态进行调查和研究^[1,2];在室内可用物理模拟方法来反演天然褶皱的几何形态和变形过程并推测其成因^[3];或是根据褶皱岩层中有限应变测量的结果及其组构特征来恢复褶皱的应变历史^[4,5]。六十年代末期,有限元方法进入地质体变形分析以来,其中有不少工作是用有限元方法模拟褶皱变形的^[3,6]。

采用有限元法模拟褶皱变形,多半是考虑对称的褶皱形态,应用弹塑性模型及粘性流体模型,可模拟单层或多层高波幅的褶皱,只有少数作者考虑非对称的褶皱形态^[6]。作者^[7]曾应用弹塑性力学模型,来模拟倒转褶皱的变形。该文考虑了褶皱的大变形,不过在体积不可压的问题上没有得到满意的结果。

本文将考虑地质体变形时具有流变的特征,采用线性牛顿流体力学模型,在平面应变情形下,模拟倒转褶皱的变形过程。计算中采用罚函数方法^[8]处理变形的不可压缩性,并将计算结果与文献[7]所得到的结果进行比较,以便得出一些规律性的认识。

二、流体力学有限元分析的基本方程

在固体力学问题的有限元分析中,控制应力-应变关系的方程可表示为力-位移的关系。对于粘性流体问题,本构关系是应力与应变率的关系,因而控制本构关系的方程应表示为力-速度的关系。它们之间的主要差别就在于后者引进了时间的概念,但对于地质学中所考虑的加速度可忽略的缓慢流动问题,只要引入位移与速度、应变与应变率、弹性模量与粘性系数各对应关系和作一些相应的变动,就可将弹性力学有限元的方法和公式,直接用于粘性流体的有限元分析。

* 本课题得到中国科学院科学基金的资助。

本文 1985 年 7 月收到,1985 年 12 月改回,王毅编辑。

在一维情况下, 线弹性固体的本构方程就是虎克定律:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1')$$

而对应的线性粘性流体的本构方程为:

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}' \quad (1)$$

上两式中, σ 为应力; E 和 η 分别为弹性模量和粘性系数; ε 和 $\dot{\varepsilon}'$ 分别表示应变和应变率。

对于不可压缩的平面流动问题, 一点在平面内的应力状态和应变率分别由三个分量表示, 在有限元分析中, 为了书写及演算的方便, 人们通常将它们表示为列矢量(简称矢量)或列阵的形式。它们之间的本构关系可用矩阵的形式表示为:

$$\sigma' = \sigma - mp = D'\dot{\varepsilon} \quad (2)$$

式中 σ' 和 σ 分别为偏应力矢量和应力矢量; $\dot{\varepsilon}$ 为偏应变率矢量; m 为与克罗内尔 (Kronecker) 记号等价的列矢量; p 为流体压力; D' 为粘性系数矩阵。式 (2) 与不可压缩的平面弹性问题的本构关系

$$\sigma' = \sigma - m\lambda' = \bar{D}\dot{\varepsilon}' \quad (2')$$

有完全类似的表达形式。式 (2') 中 λ' 和 $\bar{D}$ 分别为平均正应力和弹性系数矩阵; $\dot{\varepsilon}'$ 为偏应变矢量。对体积不可压缩的变形问题有 $\varepsilon = \varepsilon'$, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}'$

弹性平面问题几何关系为:

$$\varepsilon = Lu \quad (3')$$

与之对应的粘性平面流动问题有应变率与速度之间的关系为:

$$\dot{\varepsilon} = Lu \quad (3)$$

上两式中 u 为位移矢量(对弹性体)或速度矢量(对粘性流体); L 为微分算子矩阵。

在求解粘性流体问题时, 与求解弹性固体问题时一样, 我们不是一口气同时解出应力、应变率和速度, 而是在这些量中选定一些作为基本未知量, 然后消去其余未知量, 求出在特定边界条件下问题的解。

如果选择压力 (p) 和速度 (u) 作为求解的基本未知量, 对于忽略惯性项的缓慢流动问题, 利用平衡方程、本构方程和几何关系可消去其它的未知量, 得到 Navier-Stokes 方程:

$$L^T D' L u + L^T m p + b_0 = 0^{(1)} \quad (4)$$

这就是以速度、压力表示的平衡方程式, 其物理意义与弹性力学中采用位移表示的平衡方程式相类似。式 (4) 中的 b_0 为体力项, 符号 “T” 代表矩阵的转置。

设流体密度 ρ 为常数, 则从变形连续性方程可得体积不可压缩条件:

$$\dot{\varepsilon}_v = 0 \quad (5)$$

$\dot{\varepsilon}_v$ 为体积应变率。

由 (4) 式还不能直接求解速度, 因其中还含有未知变量压力 p , 为消去 p , 可设:

$$p = \lambda \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (6)$$

其中 λ 为一大的正数(亦称罚因子), 其物理意义与弹性体膨胀模量相类似。当 $\dot{\varepsilon}_v \rightarrow 0$

1) 有些文献中取流体压力 p 为负值, 则此式第二项为负。

时,它将使 p 保持为有限量。这样,采用和弹性固体有限元分析完全相似的方法和步骤,即得到满足体积不可压缩条件的稳态牛顿流的有限元求解方程¹⁾:

$$Ka^u = (K_1 + K_2)a^u = f \quad (7)$$

式中 a^u 和 f 分别称为总体结点速度矢量和总体载荷向量; K 为总体刚度矩阵,它由两部分组成, K_1 与粘性系数矩阵相联系,称为耗损矩阵, K_2 与体积应变率相联系,由式(6)可知它与流体压力有关,代表体积不可压缩流体。

计算中采用拉格朗日位移积分,即在每个时间间隔 Δt^n 内, u^n 只是 Δt^n 开始时刻的节点坐标的函数,当 Δt^n 结束时,节点按下式流动到新的坐标:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t^n u_i^n \quad (i = 1, 2),$$

其中 x_i^n 和 u_i^n 分别为在第 n 个时间步长中的起始坐标和速度。

文中所采用的力学模型用4—8节点的四边形等参单元剖分,单元应力采用 3×3 阶高斯积分公式进行计算。全部计算工作是根据改进的 FEAP 程序^[8,9]在科学院数学所 FIL-IX-C1024 计算机上完成的。

三、纵弯成因的对称褶皱的模拟

为熟悉和掌握流体有限元的方法,我们先进行了对称褶皱的模拟,并将结果与前人^[10,11,12]的工作进行比较。

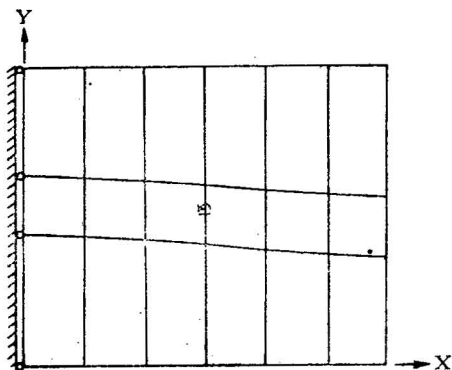


图1 对称模型的初始结构及有限元网格

Fig. 1 Initial configuration and finite-element net used in the symmetric model (For details see the text)

(一) 力学模型

根据褶皱的主波长理论^[6,13],并考虑问题的对称性,力学模型的初始结构及有限元网格(图1)。

在计算中假设条件为:

1. 褶皱层和介质层均为各向同性、满足体积不可压缩条件的理想牛顿流体,且两者之间为固结接触,沿界面无滑动;
2. 褶皱层一开始就有一个小波幅的正弦型初始挠度;
3. 忽略重力的效果。

对于平面流动问题,则沿 z 方向的速度为零。取 x, y 坐标分别平行于褶皱层面和层面的法线方向。模型的上、下表面为自由边界,左端为约束边界,在这里取 x 方向的速度为零;为消除转动,取镜面对称中心(褶皱的拐点)沿 y 方向的速度为零;右端为加载边界,沿 x 方向受有均布面力。

以下分析两个具有不同粘性系数比的力学模型。

(二) 模型 1

模型 1 用来模拟当褶皱层与介质层之间为低粘性比(以 n 表示)时的褶皱变形的情

1) 有关粘性流体有限元的详细理论和方法可参阅文献[8]第二十二章。



图 2 轴向挤压下低粘性比 ($n = 10$) 的对称褶皱形态(仅画出半个波长)

Fig. 2 Symmetric fold in a low viscosity ratio ($n = 10$) under axial compression acting parallel to the layer (only a half wavelength sketched)

况。取 $n = 10$, 时间增量 $\Delta t = 10^{12}$ 秒, 在第四个时间增量步长时, 褶皱变形的结果如图 2 所示。图中虚线是 Stephansson^[10] 采用可压牛顿流体模型计算的结果。

(三) 模型 2

这是一个经典的褶皱变形模型。模型中给定的褶皱层的初始波长、厚度和粘性比之间的关系服从 Biot^[33] 的主波长理论。其中 $n = 42.1$, 时间增量同模型 1。经过 5 个时间增量步长后, 发生褶皱变形 (图 3)。图中虚线和点线分别表示由 Dieterich 等^[11] 和 De Bremaecker 等^[12] 采用可压与不可压缩牛顿流体模型计算的结果。

模型 1 和模型 2 除了褶皱层与介质层的粘性系数比值 (n) 不同外, 具有相同的初始条件和变形条件, 但图 3 中褶皱的波幅较大, 表明粘性系数比值越高, 褶皱的生长越快。

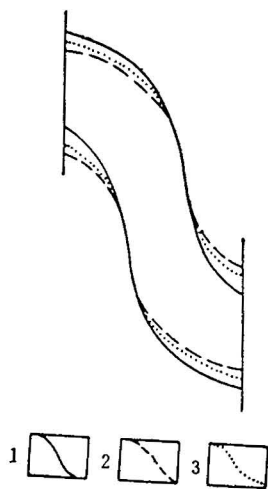


图 3 高粘性比 ($n = 42.1$) 的对称褶皱形态(仅画出半个波长)

Fig. 3 Symmetric fold in a high viscosity ratio ($n = 42.1$) (only a half wavelength)

1. 计算结果;
2. Dieterich 结果;
3. De Bremaecker 结果

四、倒转褶皱实例的模拟

(一) 地质概况与力学模型简述

用作实例分析的倒转褶皱发育于京西黄院地区中奥陶统碳酸盐岩层中, 由两个毗邻的向斜和背斜组成 (图 4)。该倒转褶皱处于北岭向斜东南延伸部位的西南翼上。由于房山花岗闪长岩体侵位所产生的侧压作用, 使北岭向斜被改造成弯月形。据此推测该倒转褶皱的形成也与这种侧压作用密切相关^[7]。几个用于描述黄院倒转褶皱几何形态的实测参数见表 1 第一行。

本文采用的力学模型及其有限元网格 (图 5) 与文献 [7] 中的基本一致, 差别只在于撤消了原设置在弹塑性力学模型中左端部的约束层, 这样可能更符合实际地质情况。

模型的底部和左端为滚筒支承, 在底部沿 y 方向的速度被约束, 在左端沿 x 方向的速度被约束。右端为加载边界, 顶部边界受有与层面平行、呈线性分布的剪应力。

(二) 粘性系数的选择

目前关于地壳岩石的粘性系数的估计主要是根据一些区域的冰后回升率进行反演推算而得到的, 其值在 10^{19} — 10^{23} 泊的范围^[14]。由于岩石的粘性系数与应变率和温度有关,



图 4 黄院倒转褶皱实例

Fig. 4 A view of the Huangyuan overfold.

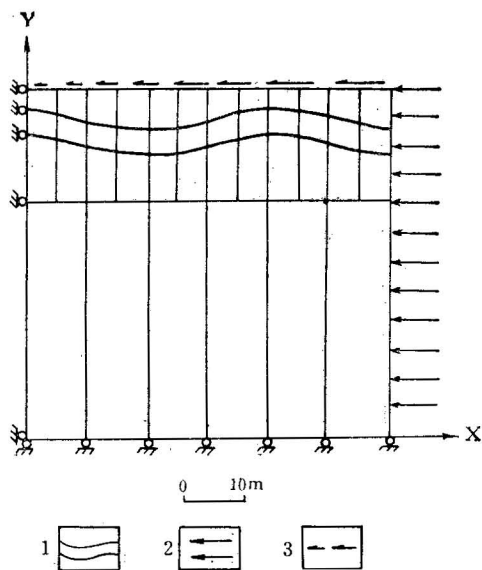


图 5 不对称模型的初始结构及有限元网格

Fig. 5 Initial configuration and finite-element net used in the asymmetric model.

1. 褶皱层;
2. 水平挤压应力;
3. 剪切应力

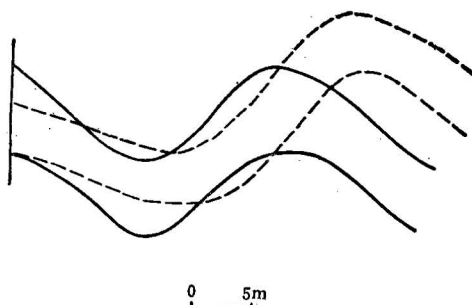
图 6 轴向挤压下的对称褶皱的几何形态(实线)
虚线: 弹塑性有限元的结果。

Fig. 6 Symmetric folding geometry under axial compression acting parallel to the layer (solid line)

Dashed line: result obtained by the Elastoplastic finite element.

因此,对于褶皱变形的速率和温度还应该作出合理的估计。文献[7]根据褶皱层的埋深以及岩体对于邻近围岩的热扩散作用推算得黄院倒转褶皱在变形当时的温度在 250°C 左右,其应变率在 10^{-13} — $10^{-14}/\text{s}$ 左右。按照 Stacey^[14]根据地壳物质的缓慢蠕变规律给出的岩石粘性系数随温度和应变率变化的规律,在上述条件下,我们把褶皱层的粘性系数取为

10^{22} 泊, 而其上下相对较软弱的介质层的粘性系数取为 10^{21} 泊, 两者相差一个量级。

(三) 计算过程及结果

假设倒转褶皱的变形是一个连续的过程, 不过我们将外力作用方式分成两个阶段来处理, 即先在轴向挤压下产生对称的弯曲变形, 然后再在上、下层面受到相对剪切作用使其产生倒转。这种剪切作用可以是在褶皱大变形过程中层间相对滑动的结果, 也可以是斜交于层面的挤压应力沿层面的分量。

为反演该褶皱的变形过程, 我们取时间增量 $\Delta t = 10^{12}$ 秒, 在岩体产生的侧压作用(假设为 50 kg/cm^2) 下, 模型首先缩短并产生弯曲变形, 经过 10 个时间增量步长(相当于 30 万年)的持续作用, 轴向缩短达到 41%, 褶皱的几何形态如图 6 所示, 其中虚线为弹塑性有限元分析的结果^[7]。显然, 褶皱是对称的。

在上述弯曲变形的基础上, 褶皱接下去受到平行于层面的剪切作用。设顶面上剪应力沿长度方向呈线性分布(从褶皱翼部向枢纽处递减)。再经过 5 个时间增量步长(相当于 15 万年)的作用, 褶皱的几何形态如图 7 (实线)所示, 其转折端相对于翼部有明显加厚。图中虚线的意义同图 6。由计算所得到的描述褶皱的几何参数见表 1 第二行(表中第三行数据为文献[7]的结果)。比较图 4 和图 7 以及表 1 的结果, 可见, 由粘性流体有限元分析的结果与实测数据更接近。

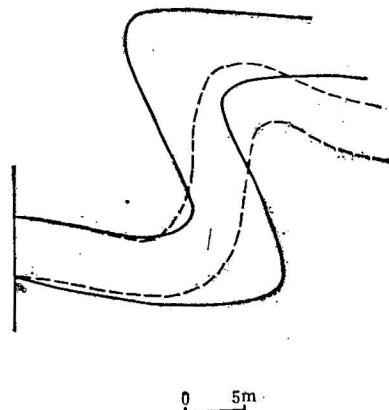


图 7 有限元方法模拟的倒转褶皱
实线: 流体材料; 虚线: 弹塑性材料。

Fig. 7 Overfold simulated by using the finite-element method Solid line: fluid material; dashed line: elastoplastic material

表 1 实测数据与粘性流体、弹塑性模型计算结果的比较

Table 1. Comparison of Measured Data with Calculated Results Obtained by Use of Viscous Fluid Model and Elasto-Plastic Model

描述褶皱的参数 实测或计算结果	褶皱波长 (m)	褶皱波幅 (m)	褶皱弧长 (m)	翼厚/转折端厚
实测数据	21.0	7.54	60.4	0.621
粘性流体模型	21.5	7.40	52.0	0.610
弹塑性模型	23.0	6.20	45.0	0.796

五、结果的比较、分析和讨论

对于本文采用粘性流体有限元模拟褶皱变形的结果, 以下将通过把它们和前人的工作结果进行比较、分析和讨论。

(一) 褶皱变形的体积可压性与不可压缩的线性牛顿流体模型

有不少学者将线性流体力学模型用于褶皱变形的有限元模拟^[6], 但他们当中多数人

在处理体积不可压缩的变形问题时,取泊松比为 0.4—0.495,而不是取 0.5。图 2、图 3 中虚线所表示的变形结果就是当泊松比取为 0.4 时的情况,与本文的不可压缩模型相比,前者的褶皱生长速度(波幅的扩大)要慢些。

此外,采用罚函数方法处理体积不可压缩的变形问题可能更节省运算量。对于一个相同的力学模型(图 1),我们仅用了 18 个四边形 8 节点等参单元,5 个时间增量步长就得到了。由 De Bremaecker 等^[42]使用 30 个等参单元、12 个时间增量步长得到图 3 中点线所示的结果;而 Dieterich 等^[41]则用了 200 个等参单元,70 个时间增量步长才得到了上述结果(图 3 中虚线所示)。

(二) 倒转褶皱的线性牛顿流体模型与弹塑性力学模型

与采用弹塑性力学模型,来模拟倒转褶皱所得的结果^[7](图 6、7 中虚线及表 1 第三行)来进行比较,发现粘性流体模型有以下的优点:

1. 考虑了时间因素的流体模型,在本质上更符合褶皱构造缓慢变形的特征;
2. 采用罚函数处理体积不可压缩的变形问题时,可使褶皱的波幅扩大更快,即褶皱生长更迅速;
3. 文献[7]中的力学模型在左端部设有约束层,试图加速褶皱的形成,带有较大的人为因素,本文将其撤消后,仍能做到褶皱的迅速生长;
4. 褶皱的倒转形态更符合天然褶皱的几何形态;
5. 用粘性流体模型计算工作量较小,只及弹塑性有限元分析计算工作量的五分之一。

六、结 束 语

综上所述,考虑体积不可压的线性牛顿流体模型,可以用来模拟褶皱构造的大变形问题。据计算结果表明:

1. 在垂直轴向的挤压条件下,影响褶皱变形的主要因素之一是褶皱层与围限它的介质层之间的粘性系数比值,但在平行于层面的剪切作用下,粘性系数比(分别计算了 $n=10$ 、 $n=42$ 和 $n=100$ 三种情况),对褶皱的倒转变形的影响并不显得十分重要;
2. 平行于褶皱层面的相对剪切作用,可能是倒转褶皱可能的成因方式,也是褶皱在转折端部位的岩层相对于翼部的岩层加厚的一个原因。

有关在分析计算中存在的某些问题(如罚函数方法及罚因子 λ 的取值范围),可参阅文献[8]和[9],在此不再赘述。

由于褶皱变形的历史是复杂的,为了更清楚地揭示各类褶皱的形成机制,还有待于进一步深入研究。比如采用不同的本构模型,考虑岩石沿层厚方向的各向异性等问题,继续寻找那些能够代表真实地质体变形的力学模型来模拟褶皱的变形过程,将能为分析和反演地壳变形提供更多的信息。

感谢孙荀英、梁北援同志对本项研究工作给予的帮助。

参 考 文 献

- [1] Donath, F. A. and Parker, R. B., 1964, Folds and folding. *Geol. Soc. Am. Bull.*, Vol. 75, pp. 45—62.
- [2] Roberts, J. L., 1982, *Introduction to Geological Maps and Structures*. 332pp, Pergamon, Oxford.
- [3] Johnson, A. M., 1977, *Styles of Folding*. 406pp, Elsevier Scientific Publishing Company, Netherlands.
- [4] Cloos, E., 1947, Oolite deformation in the South Mountain fold, Maryland. *Geol. Soc. Am. Bull.*, Vol. 58, pp. 843—918.
- [5] Onasch, C. M., 1984, Petrofabric test of viscous folding theory, *Tectonophysics*, Vol. 106, No.1—2, pp. 141—153.
- [6] 兰腊保, 1983, 褶皱的力学研究现状. *力学进展*, 第13卷, 第2期, 第235—241页.
- [7] 兰腊保、王仁, 1985, 倒转褶皱的弹塑性有限元模拟. *地质研究论文集*, 北京大学出版社.
- [8] Zienkiewicz, O. C. 1977, *The Finite Element Method*. 3rd ed., 787pp, McGraw-Hill, London.
- [9] 王仁、梁北援、孙荀英, 1985, 巷道大变形的粘性流体有限元分析. *力学学报*, 第17卷, 第2期, 第97—105页.
- [10] Stephansson, O., 1976, Finite element analysis of folds. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. Vol. 283, pp. 153—161.
- [11] Dieterich, J. H. and Carter, N. L., 1969, Stress-history of folding. *Am. J. Sci.*, Vol. 267, pp. 129—154.
- [12] De Bremaecker, J.-Cl. and Becker, E. B., 1978, Finite element models of folding. *Tectonophysics*, Vol. 50, No. 2—3, pp. 349—367.
- [13] Biot, M. A., 1961, Theory of folding of stratified viscoelastic media and its implications in tectonics and orogenesis. *Geol. Soc. Am. Bull.*, Vol. 72, pp. 1595—1620.
- [14] Stacey, F. D. (中国科学技术大学地球物理教研室译), 1981, *地球物理学*, 地震出版社.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF AN OVERFOLD USING THE VISCOUS FLUID MODEL

Lan Labao and Wang Ren*

Abstract

Symmetrical folding of a single layer and folding process of an overfold are analyzed by using the finite element method. In the analysis, the constituent substances are assumed to be isotropic and incompressible and to behave as Newtonian fluids. The penalty function method is used to treat the problem of incompressibility. The results of the analysis are compared with the data measured in the field and with those obtained by the elastoplastic finite element analysis. It shows that the overfold geometry may be well simulated by using the viscous fluid model. Thus, a possible mechanism of overfold formation is proposed.

* Peking University, Beijing.