

<http://www.geojournals.cn/dzxb/ch/index.aspx>

非均质矿物偏光图定量理论

王 曙

在非均质矿物偏光图中,所发生的光学现象是非均质旋转和反射旋转两种效应的叠加。因此,根据作者叙述的非均质旋转和均质矿物偏光图定量理论,就可以得到非均质矿物偏光图的定量理论。

设 N_1 、 N_2 、 K_1 和 K_2 为光片中非均质矿物两个主反射方向上的折射率和吸收系数; N_s 为浸没介质的折射率; R_1 和 R_2 为两个主反射方向上的反射率; $R_{\perp}$ 和 $R_{\parallel}$ 分别为光片中矿物对垂直入射面振动和平行入射面振动的直线偏光的反射率; α 和 β 分别为入射角和折射角,则对于非均质透明矿物有

$$R_1 = \frac{(N_1 - N_s)^2}{(N_1 + N_s)^2}, \quad (1A) \quad R_2 = \frac{(N_2 - N_s)^2}{(N_2 + N_s)^2}, \quad (1B)$$

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad (2A) \quad R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)}. \quad (2B)$$

对于非均质吸收性矿物有

$$R_1 = \frac{(N_1 - N_s)^2 + K_1^2}{(N_1 + N_s)^2 + K_1^2}, \quad (3A) \quad R_2 = \frac{(N_2 - N_s)^2 + K_2^2}{(N_2 + N_s)^2 + K_2^2}, \quad (3B)$$

$$R_{\perp} = \frac{(N - N_s \cos \alpha)^2 + K^2}{(N + N_s \cos \alpha)^2 + K^2}, \quad (4A)^*$$

$$R_{\parallel} = R_{\perp} \left[\frac{(N - N_s \sin \alpha \tan \alpha)^2 + K^2}{(N + N_s \sin \alpha \tan \alpha)^2 + K^2} \right]. \quad (4B)$$

在后面的叙述中,我们规定 $R_2 > R_1$ 。

(一) 反射非均质联合旋转角

已经知道,非均质矿物的“非均质旋转角 $A_{r\beta}$ ”的计算公式为

$$A_{r\beta} = \phi - \phi', \quad (5)$$

$$\tan \phi' = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \tan \phi, \quad (6)$$

$$\tan A_{r\beta} = \frac{(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}) \tan \phi}{\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1} \tan^2 \phi}. \quad (7)$$

上列式中 ϕ 为高反射率方向 R_2 与入射的直线偏光振动方向夹角; ϕ' 为反射方位角。当 $\phi = 45^\circ$ 时有

$$\sin 2A_{r\beta} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}. \quad (8)$$

* 公式(4A)和(4B)的证明见参考资料[5]及[15]。

上列式(5)至(8)对透明及吸收性矿物全都适用。

由均质矿物偏光图定量理论可知,矿物的“反射旋转角 $R_{r\beta}$ ”公式为

$$R_{r\beta} = \phi - \phi', \quad (9)$$

$$\tan \phi' = \sqrt{\frac{R_{\parallel}}{R_{\perp}}} \tan \phi, \quad (10)$$

$$\tan R_{r\beta} = \frac{(\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}}) \tan \phi}{\sqrt{R_{\perp}} + \sqrt{R_{\parallel}} \tan^2 \phi}. \quad (11)$$

上列式中 ϕ 为入射偏光方向与入射面法线间夹角,叫做入射方位角(图 1); ϕ' 为反射方位角。

为计算透明非均质矿物的反射旋转角,可将式(2A)和(2B)代入上列式中,并利用折射律

$$\sin \beta = N_s \sin \alpha / N$$

求出折射角 β 。由于非均质透明矿物有两个折射率(在同一光片上) N_1 和 N_2 , 因此,计算 $R_{r\beta}$ 角所用的折射律中的 N 是 N_1 和 N_2 的函数,其关系如下:

$$N_{\phi} = N_2 \cos^2 \phi + N_1 \sin^2 \phi, \quad (12)$$

此式为近似式。

同样,在计算吸收性非均质矿物的 $R_{r\beta}$ 角时,可将式(4A)及(4B)代入式(10)或(11)中。矿物的 N_1 、 N_2 、 K_1 、 K_2 与式(4A、4B)中的 N 、 K 关系如下列近似公式所示

$$\left. \begin{aligned} N_{\phi} &= N_2 \cos^2 \phi + N_1 \sin^2 \phi, \\ K_{\phi} &= K_2 \cos^2 \phi + K_1 \sin^2 \phi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(12)及(13)的精确性可用实际计算检验如下: 已知非均质矿物不处于消光位,它的 R_2 方向与前偏光镜方向夹角为 ϕ 时,矿物的反射率 R_{ϕ} 为

$$R_{\phi} = R_2 \cos^2 \phi + R_1 \sin^2 \phi. \quad (14A)$$

如果式(12)及(13)正确,则应有

$$R_{\phi} = \frac{(N_{\phi} - N_s)^2}{(N_{\phi} + N_s)^2} \quad (14B)$$

及

$$R_{\phi} = \frac{(N_{\phi} - N_s)^2 + K_{\phi}^2}{(N_{\phi} + N_s)^2 + K_{\phi}^2}. \quad (14C)$$

现以方解石解理面光片及赤铁矿平行 C 轴光片为例计算。方解石解理面光片 $N_1=1.566$; $N_2 = 1.688$, 矿物处于 45° 位,即 $\phi = 45^\circ$, 在空气中观察, $N_s = 1$, 按式(14A)

$$R_{45} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1.566 - 1}{1.566 + 1} \right)^2 + \left(\frac{1.688 - 1}{1.688 + 1} \right)^2 \right] = 5.496\%,$$

按式(14B), $N_{45} = \frac{1}{2} (N_1 + N_2) = 1.612$,

$$R_{45} = \frac{(1.612 - 1)^2}{(1.612 + 1)^2} = 5.490\%.$$

二式算得结果的误差小于 0.01%。赤铁矿平行 C 轴光片有 $N_1 = 3.15$; $N_2 = 2.87$; $K_1 = 0.42$; $K_2 = 0.32^*$, 其它条件同方解石, 根据式(14A)有

* 赤铁矿的 N 、 K 值根据贝瑞克 (M. Berek)。

算公式为

$$A_r = \phi - \sigma, \quad (16)$$

$$\tan 2\sigma = \tan 2\phi' \cos \Delta, \quad (17)$$

$$\tan 2A_r = \frac{\tan 2\phi - \tan 2\phi' \cos \Delta}{1 + \tan 2\phi \tan 2\phi' \cos \Delta}. \quad (18)$$

上列式中角 ϕ' 用式(6)计算, Δ 则决定于下式

$$\tan \Delta = \frac{2N_i[K_2(N_1^2 + K_1^2 - N_2^2) - K_1(N_2^2 + K_2^2 - N_1^2)]}{(N_2^2 + K_2^2 - N_1^2)(N_1^2 + K_1^2 - N_2^2) - 4N_i^2 K_1 K_2}. \quad (19)$$

根据均质矿物偏光图定量理论可知, 倾斜入射光被吸收性矿物反射后, 在垂直入射面和平行入射面的两支反射光振动(其振幅分别为 $E_\perp$ 和 $E_\parallel$, 见图 2)之间, 有着 Δ_0 的周相差, 因此反射光也是椭圆偏光。在偏光图中能观察和测定的是椭圆长轴 a 与入射偏光方向 I 的夹角 R_r , 即反射视旋转角, 它的公式为

$$R_r = \phi - \eta, \quad (20)$$

$$\tan 2\eta = \tan 2\phi' \cos \Delta_0, \quad (21)$$

$$\tan 2R_r = \frac{(R_\perp - R_\parallel \tan^2 \phi) \tan 2\phi - 2\sqrt{R_\perp R_\parallel} \tan \phi \cos \Delta_0}{(R_\perp - R_\parallel \tan^2 \phi) + 2\sqrt{R_\perp R_\parallel} \tan \phi \tan 2\phi \cos \Delta_0}. \quad (22)$$

上列式中 ϕ' 用式(10)计算, 周相差 Δ_0 决定于下式

$$\tan \Delta_0 = \frac{2N_i K \sin \alpha \tan \alpha}{N_i^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha - N^2 - K^2}, \quad (22)^*$$

式中 N 、 K 值对于非均质吸收性矿物可用式(13)计算。

在非均质吸收性矿物偏光图中任意一点的联合视旋转角 AR_r 为 A_r 和 R_r 的叠加, 即

$$AR_r = A_r \pm R_r, \quad (23)$$

式中 R_r 前正负号的意义与式(15)中角 $R_{r\beta}$ 相同。

(三) 黑双曲线方程

非均质矿物从消光位旋转物台时, 因在 $90^\circ > \phi > 0^\circ$ 的情况下, 角 $A_{r\beta}$ 或 A_r 不为零, 非均质旋转开始起作用, 偏光图由黑十字分离为黑双曲线。根据物台旋转方向的不同, 黑双曲线位于偏光图的一、三象限或二、四象限。在有黑双曲线的象限内, 对于非均质透明或弱吸收性矿物有 $AR = A_{r\beta} - R_{r\beta}$; 对于非均质强吸收性矿物有 $AR_r = A_r - R_{r0}$ 。在无黑双曲线的两象限内, 则相应为 $AR = A_{r\beta} + R_{r\beta}$ 及 $AR_r = A_r + R_{r0}$ 。在黑双曲线位置, 必然是 $A_{r\beta}$ 与 $R_{r\beta}$ (或 A_r 与 R_r) 大小相等旋转方向相反, 即非均质旋转与反射旋转二者抵消, 反射光振幅未被旋转, 与分析镜正交而消光。由此可知, 在黑双曲线处的联合旋转角为零, 即

$$AR = A_{r\beta} - R_{r\beta} = 0 \text{ 或 } AR_r = A_r - R_r = 0.$$

用上述二式, 都可以推导黑双曲线方程。对于非均质透明矿物, 当然用式 $AR = 0$; 对于非均质吸收性矿物, 为了精确应采用式 $AR_r = 0$, 但由于角 A_r 和 R_r 的计算公式都比较复杂, 推导黑双曲线方程时在数学上不便处理, 因此也采用式 $AR = 0$ 来推导, 得出的黑双

* 公式证明见参考资料[14]及[15]。

曲线方程对吸收性矿物虽是近似的,但除少数吸收性特别强烈的非均质矿物外,对大多数矿物都是足够精确的。为此,将式 $AR = A_{r\beta} - R_{r\beta} = 0$ 写成

$$\tan A_{r\beta} = \tan R_{r\beta}.$$

用式(11)代入得

$$\tan A_{r\beta} = \frac{(\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}}) \tan \phi}{\sqrt{R_{\perp}} + \sqrt{R_{\parallel}} \tan^2 \phi}.$$

上式可写成

$$\sqrt{R_{\parallel}} \tan A_{r\beta} \tan^2 \phi + (\sqrt{R_{\parallel}} - \sqrt{R_{\perp}}) \tan \phi + \sqrt{R_{\perp}} \tan A_{r\beta} = 0.$$

这是 $\tan \phi$ 的二次方程,其根为

$$\tan \phi = \frac{(\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}}) \pm \sqrt{(\sqrt{R_{\parallel}} - \sqrt{R_{\perp}})^2 - 4\sqrt{R_{\perp}}\sqrt{R_{\parallel}} \tan^2 A_{r\beta}}}{2\sqrt{R_{\parallel}} \tan A_{r\beta}}. \quad (24)$$

此式表达了入射方位角 ϕ 与非均质旋转角 $A_{r\beta}$ (也是黑双曲线处的反射旋转角 $R_{r\beta}$) 及入射角 α 三者的函数关系,可用以计算 $R_{r\beta}$ 角(其值等于角 $A_{r\beta}$) 相等的各点在偏光图内的位置,将这些点连接起来,就是偏光图的黑双曲线。此式对非均质透明矿物是精确式,对非均质吸收性矿物是适用的近似式。实际计算时对透明矿物式中 $R_{\perp}$ 、 $R_{\parallel}$ 用式(2A、B),吸收性矿物则用式(4A、B)计算后代入。本文末将用实例说明计算方法。

对于非均质透明矿物,将式(2A、B)代入式(24)中化简后可得

$$\tan \phi = \frac{\sin \alpha \sin \beta \pm \sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) \tan^2 A_{r\beta}}}{\cos(\alpha + \beta) \tan A_{r\beta}}. \quad (25)$$

在实际计算时,用上式可能比式(24)要方便些。

将式(24)中代入一定的 α 值和 $A_{r\beta}$ 值时, ϕ 有两个数值 ϕ_1 和 ϕ_2 (由根号前正负号决定),表示黑双曲线与同一个 α 圆有两个交点*,一个是方位角 ϕ_1 直线与 α 圆弧的交点,另一是 ϕ_2 直线与 α 圆弧交点。当式(24)的根式等于零时有

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}}}{2\sqrt{R_{\parallel}} \tan A_{r\beta}}. \quad (26A)$$

此时 ϕ 只有一个数值,表示黑双曲线与 α 圆弧只有一个交点,此点即黑双曲线顶点,也就是黑双曲线离偏光图中心最近一点。此点的反射旋转角 $R_{r\beta}$ 必然是该 α 圆上的最大反射旋转角。将式(24)的根式提出,并令它等于零可得

$$(\sqrt{R_{\parallel}} - \sqrt{R_{\perp}})^2 - 4\sqrt{R_{\parallel}}\sqrt{R_{\perp}} \tan^2 A_{r\beta} = 0, \quad (a)$$

$$\tan A_{r\beta} = (\sqrt{R_{\parallel}} - \sqrt{R_{\perp}})/2 \cdot \sqrt[4]{R_{\parallel}R_{\perp}} = (\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} - 1)/2 \cdot \sqrt[4]{R_{\parallel}/R_{\perp}}. \quad (27A)$$

由上式可得

$$\sin A_{r\beta} = (\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} - 1)/(\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} + 1), \quad (27B)$$

$$\cos A_{r\beta} = 2 \cdot \sqrt[4]{R_{\parallel}/R_{\perp}}/(\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} + 1), \quad (27C)$$

* 物镜后透镜亮圆圆心处,光的入射角 $\alpha = 0^\circ$, 边缘处 α 角等于物镜孔径角之半,如在亮圆中画很多同心圆,则每个同心圆都代表一种入射角 α , 由圆心向外同心圆不断增大, α 角由零增大至半孔径角。这些同心圆可叫“ α 圆”。通过亮圆的圆心,可以画出无数条直径,每一条直径都代表一个入射面, ϕ 角即是入射面法线与入射偏光方向的交角,因为在每个入射面上 ϕ 角都不同,为方便计,我们把这些表示入射面的直径叫做“ ϕ 线”,可参阅图 3。

上三式中以用 (27B) 计算最为方便。将式 (27A) 乘以负号后代入式 (26A) 中, 可将它化简为

$$\tan \phi = \sqrt[4]{\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}}. \quad (26B)$$

还可用更简单的公式求出黑双曲线顶点处的 ϕ 值, 即

$$\phi = 45^{\circ} + \frac{1}{2} A_{r\beta}. \quad (26C)$$

为证明此式, 将它写成

$$\tan \phi = \tan \left(45^{\circ} + \frac{1}{2} A_{r\beta} \right) = \frac{1 + \tan \frac{1}{2} A_{r\beta}}{1 - \tan \frac{1}{2} A_{r\beta}}.$$

因 $\tan \frac{1}{2} A_{r\beta} = \sin A_{r\beta} / (1 + \cos A_{r\beta})$, 上式变为

$$\tan \phi = \frac{1 + \cos A_{r\beta} + \sin A_{r\beta}}{1 + \cos A_{r\beta} - \sin A_{r\beta}}.$$

在计算式 (26B) 时, 代入的式 (27A) 乘了负号, 这等于式 (27B) 或 (27C) 乘了负号。将式 (27B) 乘负号后与式 (27C) 一起代入上式得

$$\tan \phi = \frac{(\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} + 1) + 2\sqrt[4]{R_{\parallel}/R_{\perp}} - (\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} - 1)}{(\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} + 1) + 2\sqrt[4]{R_{\parallel}/R_{\perp}} + (\sqrt{R_{\parallel}/R_{\perp}} - 1)} = \sqrt[4]{\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}}.$$

上式与式 (26B) 完全相同, 由此证明式 (26C) 正确。

式 (24) 所算出的 ϕ_1 和 ϕ_2 , 有下列数学关系

$$\phi_1 + \phi_2 = 90^{\circ} + A_{r\beta}. \quad (28)$$

为证明此式, 将它改写成

$$\begin{aligned} \tan(\phi_1 + \phi_2) &= \tan(90^{\circ} + A_{r\beta}) = -\cot A_{r\beta}, \\ \tan(\phi_1 + \phi_2) &= \frac{\tan \phi_1 + \tan \phi_2}{1 - \tan \phi_1 \tan \phi_2}. \end{aligned} \quad (b)$$

将式 (24) 中的 ϕ_1 和 ϕ_2 代入上式计算后, 可得

$$\tan(\phi_1 + \phi_2) = -\cot A_{r\beta},$$

与式 (b) 相等, 由此证明式 (28) 正确。式 (28) 可用来检验计算或测定值的正确与否。式 (26C) 及 (28) 对透明及吸收性矿物全都适用。

将式 (a) 写成下列形式

$$\begin{aligned} R_{\perp} + R_{\parallel} - 2\sqrt{R_{\perp}R_{\parallel}}(1 + 2\tan^2 A_{r\beta}) &= 0, \\ (R_{\perp} + R_{\parallel})^2 - 4R_{\perp}R_{\parallel}(1 + 2\tan^2 A_{r\beta})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

将式 (2A) 及 (2B) 代入式 (c), 并整理化简后可得

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \tan^2 A_{r\beta} = 0.$$

利用折射律式

$$\begin{aligned} \sin \beta &= N_s \sin \alpha / N, \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - N_s^2 \sin^2 \alpha / N^2}. \end{aligned}$$

将上式所有含折射角 β 项消去得

$$N_s^2 \sin^4 \alpha + (N_s^2 + N^2) \tan^2 A_{r\beta} \sin^2 \alpha - N^2 \tan^2 A_{r\beta} = 0.$$

这是 $\sin \alpha$ 的双二次方程, 其根为

$$\sin^2 \alpha = \frac{-(N_s^2 + N^2) \tan^2 A_{r\beta} + \sqrt{(N_s^2 + N^2)^2 \tan^4 A_{r\beta} + 4N_s^2 N^2 \tan^2 A_{r\beta}}}{2N_s^2}. \quad (29)$$

将式(4A)和(4B)代入式(C), 并化简后可得

$$N_s^4 \sin^4 \alpha \tan^4 \alpha - \frac{N_s^2 \{ (K^2 + 3N^2) + (N^2 - K^2) [2(2 \tan^2 A_{r\beta} + 1)^2 - 1] \}}{(2 \tan^2 A_{r\beta} + 1)^2 - 1} \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + (N^2 + K^2)^2 = 0.$$

这是 $\sin \alpha \tan \alpha$ 的双二次方程, 令

$$B = \frac{(K^2 + 3N^2) + (N^2 - K^2) [2(2 \tan^2 A_{r\beta} + 1)^2 - 1]}{(2 \tan^2 A_{r\beta} + 1)^2 - 1}, \quad (30A)$$

则方程的根为

$$\sin \alpha \tan \alpha = \frac{\sqrt{B - \sqrt{B^2 - 4(N^2 + K^2)^2}}}{\sqrt{2} N_s} = G. \quad (30B)$$

用上式算出 $\sin \alpha \tan \alpha = G$ 后, 可用下法求出 α 角

$$\sin^2 \alpha / \cos \alpha = G.$$

注意 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\begin{aligned} \text{有} \quad & \cos^2 \alpha + G \cos \alpha - 1 = 0, \\ & \cos \alpha = \frac{-G + \sqrt{G^2 + 4}}{2}. \end{aligned} \quad (30C)$$

式(29)表示非均质透明矿物偏光图中非均质旋转角 $A_{r\beta}$ 与 α 圆的函数关系。式(30A、B、C)则表示非均质吸收性矿物偏光图中非均质旋转角 $A_{r\beta}$ 与 α 圆的函数关系。这两个公式的用途是当透明矿物 N_1 、 N_2 值已知时, 或吸收性矿物的 N_1 、 N_2 、 K_1 、 K_2 已知时, 可以算出偏光图黑双曲线顶点所在的 α 圆弧。这就是两条黑双曲线顶点的角距离, 此距离为 2α 。例如在图4上表示出, 方解石解理面光片处于 45° 位时, 偏光图黑双曲线顶点角距 $2\alpha = 34^\circ 18'$ 。

在本文末将以方解石、金红石及赤铁矿光片为例进行 2α 值的计算。

(四) 正交反射率 ar_+

非均质矿物偏光图中, 任意一点的反射光强与入射光强之比叫做“正交反射率”, 用 ar_+ 表示。透明矿物与吸收性矿物的 ar_+ 算法有些差别, 下面先叙述透明矿物 ar_+ 算法。

设 O 为偏光图中任意一点(图1), 入射的直线偏光振幅为 I , I 与入射面 FOF 的法线交角为入射方位角 ϕ 。 I 将分解为垂直及平行入射面的分振幅 $I_\perp$ 和 $I_\parallel$, 由图1可知

$$I_\perp = I \cdot \cos \phi, \quad I_\parallel = I \cdot \sin \phi.$$

设点 O 处入射光的入射角为 α , $I_\perp$ 和 $I_\parallel$ 被反射后相应反射光振幅为 $E_\perp$ 和 $E_\parallel$, 根据 $R_\perp = [E_\perp / I_\perp]^2$ 及 $R_\parallel = [E_\parallel / I_\parallel]^2$, 可得

$$\left. \begin{aligned} E_{\perp} &= I_{\perp} \sqrt{R_{\perp}} = I \cos \phi \sqrt{R_{\perp}}, \\ E_{\parallel} &= I_{\parallel} \sqrt{R_{\parallel}} = I \sin \phi \sqrt{R_{\parallel}}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$E_{\perp}$ 和 $E_{\parallel}$ 合成后为直线偏光, 相对于入射偏光 I , 它旋转了一个角度 $R_{r\beta}$, 因此, 它应处在图 1 中虚线 OE_0 位置。由于矿物同时存在着非均质旋转, 旋转角为 $A_{r\beta}$ 。如果非均质旋转与反射旋转方向相同, 则反射光合振幅被再一次旋转而达到图 1 的 OE 位置。此时 OE 与入射光振幅交角为 $A_{r\beta} + R_{r\beta}$ 。如果 $A_{r\beta}$ 旋转方向与 $R_{r\beta}$ 相反, 则为 $A_{r\beta} - R_{r\beta}$ 。这就是联合旋转角 $AR = A_{r\beta} \pm R_{r\beta}$ 。

设透过分析镜 AA 的分振幅为 GE

$$GE = OE \sin AR = OE \sin (A_{r\beta} \pm R_{r\beta}),$$

光强为上式平方

$$\overline{GE}^2 = \overline{OE}^2 \sin^2(A_{r\beta} \pm R_{r\beta}).$$

由于

$$\overline{OE}^2 = E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2 = I^2 (\cos^2 \phi R_{\perp} + \sin^2 \phi R_{\parallel}),$$

代入前式, 可得偏光图中任意一点的正交反射率 ar_+ 为

$$ar_+ = \left[\frac{GE}{I} \right]^2 = (\cos^2 \phi R_{\perp} + \sin^2 \phi R_{\parallel}) \sin^2(A_{r\beta} \pm R_{r\beta}). \quad (32A)$$

将式 (2A、B) 代入上式

$$ar_+ = \left[\cos^2 \phi \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \sin^2 \phi \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)} \right] \sin^2(A_{r\beta} \pm R_{r\beta}). \quad (32B)$$

对于非均质透明矿物偏光图中任意一点, 方位角 ϕ 和入射角 α 是已知的, 用折射律式算出折射角 β , 用式 (7) 和 (11) 算出角 $A_{r\beta}$ 及 $R_{r\beta}$, 代入上式即可算出 ar_+ 。

当矿物处于消光位时, 式 (7) 之 $\phi = 0$ 或 90° , 角 $A_{r\beta}$ 为零, 式 (32A) 变为

$$ar_+ = (E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2) \sin^2 R_{r\beta} / I^2. \quad (d)$$

由式 (9) 可得

$$\sin^2 R_{r\beta} = \sin^2(\phi - \phi') = (\sin \phi \cos \phi' - \sin \phi' \cos \phi)^2.$$

由图 1 可知

$$\begin{aligned} \sin \phi' &= \frac{E_{\parallel}}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2}}, \quad \cos \phi' = \frac{E_{\perp}}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2}}, \\ \sin^2 R_{r\beta} &= \frac{1}{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2} (E_{\perp} \sin \phi - E_{\parallel} \cos \phi)^2. \end{aligned}$$

将式 (31) 代入上式, 并注意 $\cos \phi \sin \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi$,

$$\sin^2 R_{r\beta} = \frac{I^2}{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2} \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2\phi (\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}})^2.$$

代入式 (d) 得

$$ar_+ = \frac{1}{4} \sin^2 2\phi (\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}})^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\phi \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2, \quad (33)$$

上式为均质透明矿物偏光图内任意一点的正交反射率公式。这表明非均质透明矿物处于消光位时, 偏光图与均质矿物相同。

当旋转物台矿物移离消光位时, 偏光图黑十字分解为黑双曲线, 在双曲线处必然有 $ar_+ = 0$, 代入式(32)后可知, 只有式中 $\sin^2(A_{r\beta} \pm R_{r\beta})$ 项为零时式(32)才能为零, 此时即 $A_{r\beta} = R_{r\beta}$, 这与前面推导黑双曲线方程时的条件相符。

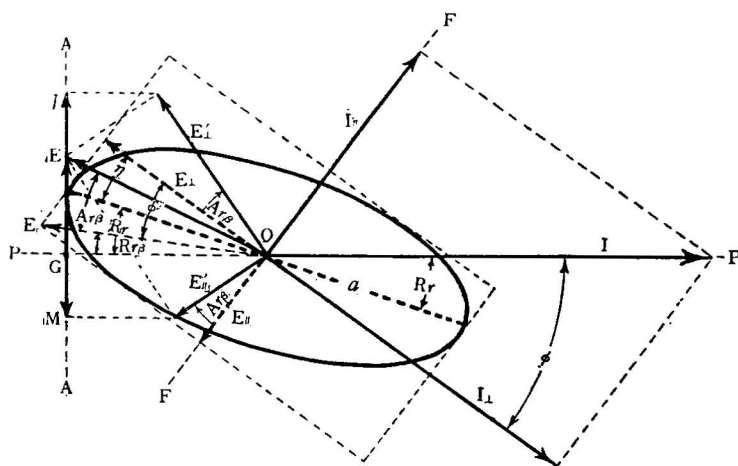
矿物移离消光位时, 原黑十字处变亮。在平行起偏镜的东西向上, 有 $\phi = 90^\circ$, $R_{r\beta} = 0^\circ$; 在平行分析镜的南北向上, 有 $\phi = 0^\circ$, $R_{r\beta} = 0^\circ$, 代入式(32)可得

$$\begin{aligned} ar_+(EW) &= [\cos^2 90^\circ R_{\perp} + \sin^2 90^\circ R_{\parallel}] \sin^2 A_{r\beta} \\ &= R_{\parallel} \sin^2 A_{r\beta} = \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)} \sin^2 A_{r\beta}, \end{aligned} \quad (34A)$$

$$ar_+(SN) = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \sin^2 A_{r\beta}. \quad (34B)$$

上二式表明, 在正东西和南北两条线上 ar_+ 值不相等, 即亮度不同。由于在 α 角很小时正切值等于正弦值, 故偏光图中心附近亮度基本相等, 只在 α 角较大的偏光图边缘, EW 线和 SN 线上亮度差别才较大。式(34A, B)是按入射偏光为东西向推导的, 可以看出南北线上亮度较大。这在表 3 上看得更清楚。

现推导非均质吸收性矿物的 ar_+ 公式。设 O 为偏光图内任意一点(图 2), 象对非均



别到达图 2 的 $E'_\perp$ 和 $E'_\parallel$ 位置。 $E'_\perp$ 和 $E'_\parallel$ 都与分析镜 AA 斜交, 设透过分析镜的分振幅分别为 GJ 和 GM , 据图 2 及式(e)有

$$\left. \begin{aligned} GJ &= E_\perp \sin(\phi \pm A_{r\beta}) = I \cos \phi \sin(\phi \pm A_{r\beta}) \sqrt{R_\perp}, \\ GM &= E_\parallel \cos(\phi \pm A_{r\beta}) = I \sin \phi \cos(\phi \pm A_{r\beta}) \sqrt{R_\parallel}, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

在 GJ 和 GM 之间有 Δ_0 的周相差, 它们现在处于同一直线 AA 上, 故将发生干涉, 干涉后的合振幅 E_s 为

$$E_s^2 = \overline{GJ^2} + \overline{GM^2} - 2GJ \cdot GM \cdot \cos \Delta_0.$$

将式(f)代入上式后, 可得到非均质吸收性矿物偏光图内 O 点的正交反射率 ar_+ 为

$$\begin{aligned} ar_+ = \left[\frac{E_s}{I} \right]^2 &= R_\perp \cos^2 \phi \sin^2(\phi \pm A_{r\beta}) + R_\parallel \sin^2 \phi \cos^2(\phi \pm A_{r\beta}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{R_\perp R_\parallel} \sin 2\phi \sin 2(\phi \pm A_{r\beta}) \cos \Delta_0. \end{aligned} \quad (35)$$

用式(4A、B)算出 $R_\perp$ 和 $R_\parallel$, 式(7)算出角 $A_{r\beta}$ 及式(22)算出 Δ_0 后, 代入上式即可得出 ar_+ 。

当矿物处于消光位时, 上式中的非均质旋转角 $A_{r\beta}$ 为零, 得到

$$ar_+ = \frac{1}{4} \sin^2 2\phi (R_\perp + R_\parallel - 2\sqrt{R_\perp R_\parallel} \cos \Delta_0). \quad (36)$$

这是均质吸收性矿物偏光图内任意一点的正交反射率公式, 即非均质吸收性矿物处于消光位时, 偏光图特点与均质矿物相同。

当旋转物台矿物移离消光位时, 偏光图黑十字分离为黑双曲线, 原黑十字处变亮。在平行起偏镜的东西向上, 有 $\phi = 90^\circ$; 在南北向上, $\phi = 0^\circ$, 代入式(35)后得

$$ar_+(EW) = R_\parallel \sin^2 A_{r\beta}, \quad (37A)$$

$$ar_+(SN) = R_\perp \sin^2 A_{r\beta}. \quad (37B)$$

由于 $R_\perp$ 一定大于 $R_\parallel$, 故南北线上亮度大于东西线, 并且是 α 愈大即愈向偏光图边缘时, 两条线上的亮度差别愈大。

(五) 平均正交反射率 $\overline{ar_+}$, 平均反射率 $\overline{R}$ 及 T 值

式(32)和(35)表示非均质矿物偏光图内任意一点的正交反射率, 整个偏光图的亮度是所有点亮度的平均值, 用平均正交反射率 $\overline{ar_+}$ 表示。 $\overline{ar_+}$ 就是未取下目镜时(或推出勃氏镜时)显微镜视野内矿物在聚敛的正交偏光下的正交反射率。

由于偏光图内入射方位角 ϕ 和入射角 α 在每一点都不同, 而且连续变化, 因此计算 $\overline{ar_+}$ 值须用二重积分法, 根据二重积分中值定理, 对于非均质透明矿物据式(32)有

$$\overline{ar_+} = \frac{1}{s} \iint_s ar_+ ds = \frac{1}{(\phi - \phi_0)(\alpha - \alpha_0)} \int_{\phi_0}^{\phi} \int_{\alpha_0}^{\alpha} [R_\perp \cos^2 \phi + R_\parallel \sin^2 \phi] \sin^2(A_{r\beta} \pm R_{r\beta}) d\phi d\alpha$$

上式中变量 ϕ 和 α 的积分域与均质矿物偏光图相同, 即 ϕ 由 0 至 $\pi/2$; α 由 0 至 α_1 , α_1 为所用物镜的半孔径角, 决定于物镜的数值孔径 $N \cdot A$, 即 $\sin \alpha = N \cdot A / N_s$, 故上式可写成

$$\overline{ar_+} = \frac{2}{\pi \alpha_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\alpha_1} [R_\perp \cos^2 \phi + R_\parallel \sin^2 \phi] \sin^2(A_{r\beta} \pm R_{r\beta}) d\phi d\alpha. \quad (38)$$

对于非均质吸收性矿物,其 $\overline{\text{ar}}_+$ 也用二重积分中值定理计算,据式(35)有

$$\overline{\text{ar}}_+ = \frac{1}{s} \iint_s \text{ar}_+ ds = \frac{1}{(\phi - \phi_0)(\alpha - \alpha_0)} \int_{\phi_0}^{\phi} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left[R_{\perp} \cos^2 \phi \sin^2(\phi \pm A_{r\beta}) + R_{\parallel} \sin^2 \phi \cos^2(\phi \pm A_{r\beta}) - \frac{1}{2} \sqrt{R_{\perp} R_{\parallel}} \sin 2\phi \sin 2(\phi \pm A_{r\beta}) \cos \Delta_0 \right] d\phi d\alpha.$$

上式的积分域与透明矿物相同,故得

$$\overline{\text{ar}}_+ = \frac{2}{\pi \alpha_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\alpha_1} \left[R_{\perp} \cos^2 \phi \sin^2(\phi \pm A_{r\beta}) + R_{\parallel} \sin^2 \phi \cos^2(\phi \pm A_{r\beta}) - \frac{1}{2} \sqrt{R_{\perp} R_{\parallel}} \sin 2\phi \sin 2(\phi \pm A_{r\beta}) \cos \Delta_0 \right] d\phi d\alpha. \quad (39)$$

式(38)和(39)的积分原函数都积不出,实际计算可采用近似积分法。对于有黑双曲线象限,角 $A_{r\beta}$ 前取负号,无黑双曲线象限, $A_{r\beta}$ 前取正号。

当矿物处于消光位时,式(38)中角 $A_{r\beta}$ 为零,据式(33)有

$$\begin{aligned} \overline{\text{ar}}_+ &= \frac{1}{4\pi \alpha_1} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\phi d\phi \int_0^{\alpha_1} \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{8\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2 d\alpha = \frac{1}{8\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} [\sqrt{R_{\perp}} - \sqrt{R_{\parallel}}]^2 d\alpha. \quad (38A) \end{aligned}$$

对于非均质吸收性矿物,当它处于消光位时,式(39)中角 $A_{r\beta}$ 为零,故得

$$\begin{aligned} \overline{\text{ar}}_+ &= \frac{1}{2\pi \alpha_1} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\phi d\phi \int_0^{\alpha_1} [R_{\perp} + R_{\parallel} - 2\sqrt{R_{\perp} R_{\parallel}} \cos \Delta_0] d\alpha \\ &= \frac{1}{8\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} [R_{\perp} + R_{\parallel} - 2\sqrt{R_{\perp} R_{\parallel}} \cos \Delta_0] d\alpha. \quad (39A) \end{aligned}$$

式(38A)及(39A)也是均质透明和吸收性矿物偏光图的平均正交反射率公式。

平均反射率 $\bar{R}$ 是用聚敛偏光观察时,非均质吸收性矿物移离消光位后在单偏光下的反射率,它是一个平均值。在物镜圆*中,亮度分布却是不均匀的,每一点的反射率都不同。由图 1 可知,物镜圆中任意一点 O 的反射率 R 为

$$R = [OE_0/I]^2 = (E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2)/I^2.$$

将式(31)代入后得

$$R = R_{\perp} \cos^2 \phi + R_{\parallel} \sin^2 \phi. \quad (40)$$

使用二重积分中值定理,可以求出 $\bar{R}$,积分域与式(38)及(39)相同

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{1}{(\pi/2 - 0)(\alpha_1 - 0)} \left[\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi \int_0^{\alpha_1} R_{\perp} d\alpha + \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi \int_0^{\alpha_1} R_{\parallel} d\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} [R_{\perp} + R_{\parallel}] d\alpha. \quad (41) \end{aligned}$$

式(40)和(41)对非均质透明及吸收性矿物全都适用,对于透明矿物, $R_{\perp}$ 及 $R_{\parallel}$ 用式(2A、B)计算,其中 N 值用式(12)计算。对于吸收性矿物, $R_{\perp}$ 及 $R_{\parallel}$ 用式(4A、B)计算,其中 N 、 K 值用式(13)计算。

T 为 $\overline{\text{ar}}_+$ 与 $\bar{R}$ 之比,表示在聚敛入射偏光下,非均质矿物在正交偏光下亮度与单偏

* 指取下目镜或推入勃氏镜后见到的物镜后透镜亮圆。

光下亮度之比。对于透明矿物有

$$T = \text{式(38)}/\text{式(41)}, \tag{42A}$$

对于吸收性矿物有

$$T = \text{式(39)}/\text{式(41)}. \tag{42B}$$

(六) 实例 计算

现以方解石解理面的光片为例，用上面得出的公式计算矿物处于 45° 位置时的一些光性数据。计算时假定用 $N \cdot A = 0.85$ 的干物镜，其半孔径角 α_1 为： $\sin \alpha_1 = 0.85$, $\alpha_1 = 58^\circ 12'$ 。

在波长 589 毫微米的钠光中，方解石解理面的两个主折射率为 $N_1 = 1.566$, $N_2 = 1.658$ ；矿物处于 45° 位时，据式(12)及(7)有

$$N = (N_1 + N_2)/2 = 1.612,$$

$$\tan A_{r\beta} = (N_2 - N_1)/(N_1 N_2 - 1) = 0.0576; A_{r\beta} = 3^\circ 18'.$$

(1) 计算联合旋转角 AR

假定矿物处于 45° 位置时，偏光图黑双曲线位于二、四象限。据式(15)在一、三象限

表 1 方解石解理面光片处于 45° 位置时偏光图内 AR 的分布

第一、三象限				$AR = A_{r,\beta} + R_{r,\beta} = 3^{\circ}18' + R_{r,\beta}$									
α		10°		20°		30°		40°		50°		58°12'	
ϕ	$\tan\phi$	$R_{r,\beta}$	AR	$R_{r,\beta}$	AR	$R_{r,\beta}$	AR	$R_{r,\beta}$	AR	$R_{r,\beta}$	AR	$R_{r,\beta}$	AR
0°	0	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'
10°	0.1763	22'	3°40'	1°27'	4°45'	3°8'	6°26'	5°18'	8°36'	7°48'	11°6'	10°	13°18'
20°	0.3640	41'	3°59'	2°45'	6°3'	6°3'	9°21'	10°23'	13°41'	15°29'	18°47'	20°	23°18'
30°	0.5774	56'	4°14'	3°46'	7°4'	8°30'	11°48'	14°57'	18°15'	22°51'	26°9'	30°	33°18'
40°	0.8391	1°4'	4°22'	4°23'	7°41'	10°13'	13°31'	18°40'	21°51'	29°41'	32°59'	40°	43°18'
50°	1.1918	1°5'	4°23'	4°30'	7°48'	10°53'	14°11'	20°59'	24°17'	35°30'	38°48'	50°	53°18'
60°	1.732	58'	4°16'	4°4'	7°22'	10°14'	13°32'	21°8'	24°26'	39°24'	42°42'	60°	63°18'
70°	2.747	43'	4°1'	3°6'	6°24'	8°6'	11°24'	18°2'	21°20'	39°12'	42°30'	70°	73°18'
80°	5.671	23'	3°41'	1°40'	4°58'	4°30'	7°48'	10°46'	14°4'	29°6'	32°24'	80°	83°18'
90°	∞	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'	0	3°18'

第二、四象限		$AR = A_{r,\beta} - R_{r,\beta} = 3^{\circ}18' - R_{r,\beta}$					
ϕ	AR	AR	AR	AR	AR	AR	
10°	2°56'	1°51'	10'	-2°0'	-4°30'	-6°42'	
20°	2°37'	33'	-2°45'	-7°5'	-12°11'	-16°42'	
30°	2°22'	-28'	-5°12'	-11°39'	-19°33'	-26°42'	
40°	2°14'	-1°5'	-6°55'	-15°22'	-26°23'	-36°42'	
50°	2°13'	-1°12'	-7°35'	-17°41'	-32°12'	-46°42'	
60°	2°20'	-46'	-6°56'	-17°50'	-36°6'	-56°42'	
70°	2°35'	12'	-4°48'	-14°44'	-35°54'	-66°42'	
80°	2°55'	1°38'	-1°12'	-7°28'	-25°48'	-76°42'	

表中 AR 前负号表示反射光振幅旋转方向与正号者相反。

有

$$AR = A_{r\beta} + R_{r\beta} = 3^\circ 18' + R_{r\beta},$$

在二、四象限则有

$$AR = A_{r\beta} - R_{r\beta} = 3^\circ 18' - R_{r\beta}.$$

由于 $R_{r\beta}$ 值在偏光图四个象限内对称分布,故只须计算一个象限即可。

表 1 列出了偏光图第一、三和二、四象限内 ϕ 及 α 每隔 10° 计算一次的联合旋转角,其中角 $R_{r\beta}$ 用式(11)计算。

(2) 黑双曲线顶点的角距

为了比较,计算方解石(解理面)、金红石及赤铁矿的黑双曲线顶点角距。先计算方解石(解理面)。将 $N = 1.612$ 及 $\tan A_{r\beta} = \tan 3^\circ 18'$ 代入式(29)得

$$\sin \alpha = 0.2951, \alpha = 17^\circ 9'$$

由此可知,方解石黑双曲线顶点角距 $2\alpha = 34^\circ 18'$ (图 4)。

金红石 $N_2 = 2.903$; $N_1 = 2.616$; $N = (N_1 + N_2)/2 = 2.7595$,

$$\tan A_{r\beta} = (N_2 - N_1)/(N_1 N_2 - 1) = 0.0435; A_{r\beta} = 2^\circ 29'.$$

将上列值代入式(29)得

$$\sin \alpha = 0.3289; \alpha = 19^\circ 12'.$$

即金红石平行光轴光片处于 45° 位时偏光图的黑双曲线 $2\alpha = 38^\circ 24'$ 。

赤铁矿在 589 毫微米钠光中,其平行光轴光片两个主折射率和吸收系数为

$$N_2 = 3.15; N_1 = 2.87; K_2 = 0.42; K_1 = 0.32.$$

由式(7)及(18)计算出赤铁矿的 $A_{r\beta}$ 与 A 角完全相等,都是 $2^\circ 4'$ 。赤铁矿处于 45° 位时,据式(13)有

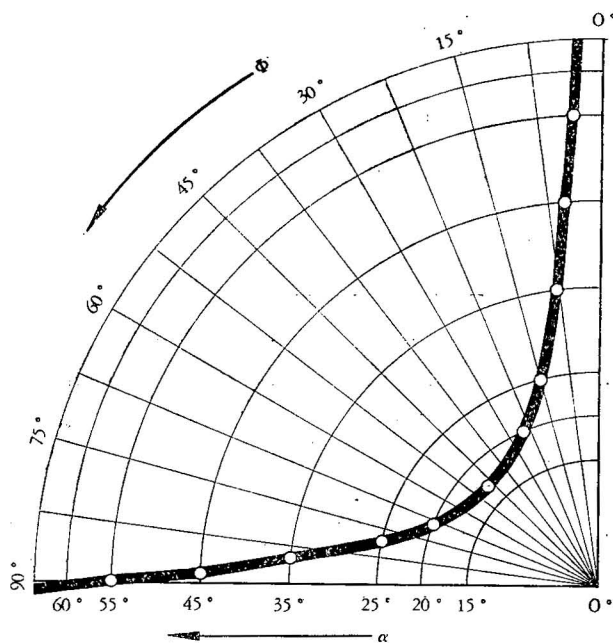


图3. 方解石(解理面)处于 45° 位时偏光图的黑双曲线。

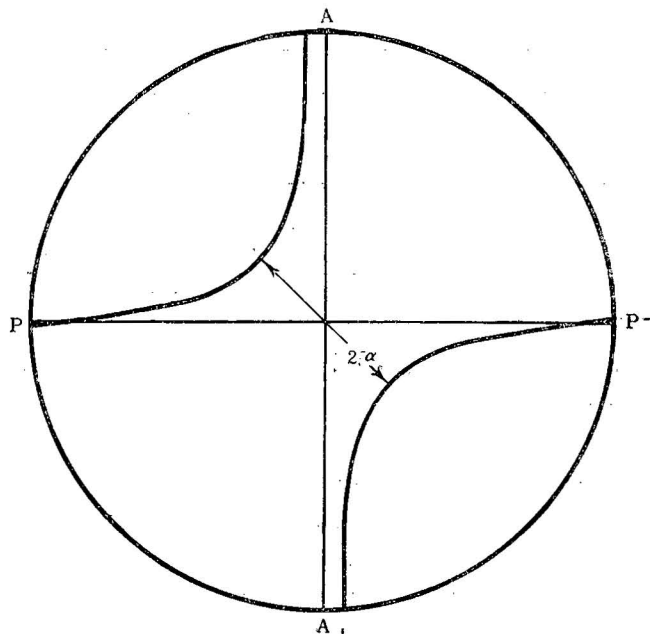


图 4. 方解石(解理面)处于 45° 位时偏光图黑双曲线的顶点角距 2α

$$N = (N_2 + N_1)/2 = 3.01; K = (K_2 + K_1)/2 = 0.37.$$

将 N 、 K 及 $\tan A_{r\beta} = \tan 2^\circ 4'$ 代入式 (30A), 可算出 $B = 6846.54042$, 代入式 (30B), 得 $\sin \alpha \tan \alpha = 0.1111$, 再代入式 (30C) 中得

$$\cos \alpha = 0.9455, \alpha = 19^\circ.$$

即赤铁矿处于 45° 位时, 偏光图黑双曲线顶点位于 $\alpha = 19^\circ$ 圆弧上, 两顶点角距 $2\alpha = 38^\circ$ 。

矿物处于 45° 位时偏光图黑双曲线顶点的角距 2α , 是矿物的定量鉴定特征。用参考资料[8]中的方法; 2α 值可在矿相显微镜下测定。

比较方解石(解理面)和金红石的 2α 值可知, 2α 值并不与 $A_{r\beta}$ 的大小成正比, 例如方解石(解理面)的 $A_{r\beta} = 3^\circ 18'$, $2\alpha = 34^\circ 18'$; 金红石的 $A_{r\beta} = 2^\circ 29'$, 但 $2\alpha = 38^\circ 24'$, 比方解石(解理面)大。

(3) 黑双曲线形态

将方解石(解理面)光片的 $A_{r\beta}$ 角代入式 (26C) 中, 可以算出黑双曲线顶点所在的 ϕ 线

$$\phi = 45^\circ + 1^\circ 39' = 46^\circ 39';$$

表示顶点位于 $\alpha = 17^\circ 9'$ 圆弧与 $\phi = 46^\circ 39'$ 直线的交点上(图 3)。

然后将 $\alpha = 20^\circ$ 、 25° 、 35° 、 45° 及 55° 分别代入式 (24) 或 (25) 中, 可算出一系列 ϕ 值(表 2)。

根据表 2 数据, 在图 3 绘出了方解石(解理面)位于 45° 时偏光图的黑双曲线。图上只绘出了第二象限, 第四象限形态相同, 惟两条黑双曲线以偏光图中心为对称中心。图 4 则绘出整个偏光图形态。

(4) 正交反射率 ar_+ 的分布

用式 (32B) 计算, 其中角 AR 已在表 1 列出。

表 2

非均质旋转角	3°18'					
入 射 角 α	17°9'	20°	25°	35°	45°	55°
$\tan \phi = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$	1.059	2.545	4.763	12.48	32.99	186.1
		0.4606	0.2703	0.1390	0.0881	0.0627
$\phi = \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \right.$	46°39'	68°33'	78°9'	85°24'	88°16'	89°42'
		24°44'	15°8'	7°54'	5°2'	3°36'

在表 3 上列出了作者计算的 ar_+ 值,可以看出,在平行起偏镜的正东西向上 ($\phi=90^\circ$ 线上), ar_+ 值恒小于平行分析镜的正南北向 ($\phi=0^\circ$ 线)。

表 3

第一、三象限						AR = A _r β + R _r β						
α ar₊ φ	10		20		30		40		50		58.2	
	AR	ar ₊	AR	ar ₊	AR	ar ₊	AR	ar ₊	AR	ar ₊	AR	ar ₊
0	3°18′	.00019	3°18′	.00021	3°18′	.00026	3°18′	.00033	3°18′	.00047	3°18′	.00066
10	3°49′	.00025	4°45′	.00042	6°26′	.00095	8°36′	.00220	11°6′	.00509	13°18′	.01014
20	3°59′	.00027	6°3′	.00067	9°21′	.00191	13°41′	.00512	18°47′	.01304	23°18′	.02729
30	4°14′	.00031	7°4′	.00087	11°48′	.00280	18°15′	.00794	26°9′	.02093	33°18′	.04464
40	4°22′	.00032	7°41′	.00098	13°31′	.00329	21°51′	.00945	32°59′	.02541	43°18′	.05455
50	4°23′	.00032	7°48′	.00096	14°11′	.00319	24°17′	.00921	38°48′	.02449	53°18′	.05249
60	4°16′	.00030	7°22′	.00081	13°32′	.00254	24°26′	.00711	42°42′	.01856	63°18′	.03942
70	4°1′	.00026	6°24′	.00058	11°24′	.00160	21°20′	.00411	42°30′	.01022	73°18′	.02121
80	3°41′	.00022	4°58′	.00034	7°48′	.00069	14°4′	.00143	32°24′	.00307	83°18′	.00587
90	3°18′	.00018	3°18′	.00015	3°18′	.00012	3°18′	.00007	3°18′	.00002	3°18′	0

第二、四象限						AR = A _r β - R _r β						
10	2°56′	.00015	1°51′	.00006	10′	.00000	-2°0′	.00012	-4°30′	.00084	-6°42′	.00026
20	2°37′	.00012	33′	.00001	-2°45′	.00017	-7°5′	.00113	-12°11′	.00561	-16°42′	.01441
30	2°22′	.00010	-28′	.00000	-5°12′	.00055	-11°39′	.00331	-19°33′	.01210	-26°42′	.03289
40	2°14′	.00008	-1°5′	.00002	-6°55′	.00087	-15°22′	.00478	-26°23′	.01694	-36°42′	.04141
50	2°13′	.00008	-1°12′	.00002	-7°35′	.00092	-17°41′	.00503	-32°12′	.01772	-46°42′	.04325
60	2°20′	.00009	-46′	.00001	-6°56′	.00068	-17°50′	.00390	-36°6′	.01402	-56°42′	.03451
70	2°35′	.00011	12′	.00000	-4°48′	.00029	-14°44′	.00207	-35°54′	.00771	-66°42′	.01950
80	2°55′	.00014	1°38′	.00004	-1°12′	.00016	-7°28′	.00041	-25°48′	.00020	-76°42′	.00563

(5) 平均正交反射率 $\overline{ar_+}$

将表 3 中 ar_+ 值相加后求平均值,即得平均正交反射率 $\overline{ar_+}$ 。表上共 120 项*,相加后为 0.74558,由此得

$$\overline{ar_+} = 0.74558/120 = 0.6213\%.$$

* 其中 $\phi=0$ 及 $\phi=90^\circ$ 项第二、四象限也有,数值与一、三象限相等。

这表示方解石(解理面)光片处于 45° 位置, 用 $N \cdot A = 0.85$ 干物镜在正交偏光下观察时, 它的亮度为入射光强的 0.6213% 。

为了比较, 我们用公式 (38A) 计算矿物处于消光位时的平均正交反射率 $\overline{ar}_+$ 。假定入射偏光方向平行于 $N_2 = 1.658$ 方向。采用梯形法对积分作近似计算, 梯形法公式为

$$\int_0^a f(\alpha) d\alpha = \frac{\Delta\alpha}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})],$$

其中 $\Delta\alpha = (\alpha - 0)/n$, $y_k = f(\alpha_k)$, ($k = 0, 1, 2, \cdots, n$)。因 $\alpha = 58.2^\circ$, 令 $\Delta\alpha = \alpha_1/7$, 得

α	β	$\alpha - \beta$	$\alpha + \beta$	$y = \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2$	
0	0	0	0	0	
$8^\circ 19'$	5°	$3^\circ 19'$	$13^\circ 19'$		0.00004
$16^\circ 38'$	$9^\circ 57'$	$6^\circ 41'$	$26^\circ 35'$		0.00067
$24^\circ 57'$	$14^\circ 44'$	$10^\circ 13'$	$39^\circ 41'$		0.00367
$33^\circ 15'$	$19^\circ 19'$	$13^\circ 56'$	$52^\circ 34'$		0.01286
$41^\circ 34'$	$23^\circ 36'$	$17^\circ 58'$	$65^\circ 10'$		0.03598
$49^\circ 53'$	$27^\circ 28'$	$22^\circ 25'$	$77^\circ 21'$		0.08868
$58^\circ 12'$	$30^\circ 50'$	$27^\circ 22'$	$89^\circ 2'$	0.2034	
				0.2034	0.1419

$$\bar{r}_+ = \frac{1}{8\alpha_1} \left\{ \frac{\alpha_1/7}{2} [0.2034 + 2(0.1419)] \right\} = 0.435\%.$$

这表示方解石(解理面)光片在 $N = 1.658$ 方向平行于入射偏光方向时(消光位之一), 偏光图的平均亮度, 也是正交偏光下视野中矿物亮度为入射光亮度的 0.435% 。

与矿物处于 45° 时的亮度相比, 二者绝对亮度差设为 δr_+ , 相对亮度差为 Δr_+ , 有

$$\delta r_+ = \overline{ar}_+ - \bar{r}_+ = 0.6213\% - 0.435\% = 0.1863\%,$$

$$\Delta r_+ = (\overline{ar}_+ - \bar{r}_+) / \frac{1}{2} (\overline{ar}_+ + \bar{r}_+) = 35.27\%.$$

在垂直光下方解石平行 C 轴光片的相对双反射 $\Delta R = 40\%$, 此处 Δr_+ 为 35.27% , 故正交偏光下旋转物台时(用 $N \cdot A = 0.85$ 干物镜观察)矿物亮度变化强烈情况大致与垂直光下双反射相等。

(6) 平均反射率 $\bar{R}$ 及 T 值

α	β	$y = \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right]^2 + \left[\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2$	
0	0	$2 \times 0.0549 = 0.1098$	
10°	$6^\circ 11'$		0.1099
20°	$12^\circ 21'$		0.1104
30°	$18^\circ 4'$		0.1133
40°	$23^\circ 30'$		0.1226
50°	$28^\circ 23'$		0.1482
58.2°	$31^\circ 48'$	0.1976	
		0.3074	0.6044

采用梯形法对式(41)的 $\bar{R}$ 作近似计算, α 每隔 10° 算一次。

$$N = 1.612, \sin \beta = \sin \alpha / 1.612,$$

$$\bar{R} = \frac{1}{2\alpha_1} \left[\frac{\alpha_1/6}{2} (0.3074 + 2 \cdot 0.6044) \right] = 6.318\%.$$

据式(42A)有

$$T = \overline{\ar_+} / \bar{R} = 0.6213 / 6.318 = 9.834\%,$$

表示方解石(解理面)在正交偏光下亮度为单偏光下亮度的 9.834%。

参 考 资 料

- [1] E. N. Cameron and L. H. Green, 1950 Polarization figures and rotation properties in reflected light and their application to the identification of ore minerals. *Econ. Geol.*, Vol. 45.
- [2] E. N. Cameron and Others, 1953 Sources of error in the measurement of rotation properties with the ore microscope. *Econ. Geol.*, Vol. 48.
- [3] E. N. Cameron, 1957 Apparatus and techniques for the measurement of certain optical properties of ore minerals in reflected light. *Econ. Geol.*, Vol. 52.
- [4] F. A. Jenkins and H. E. White, 1957 Fundamentals of physical Optics.
- [5] T. S. Moss, 1959 Optical properties of semiconductors.
- [6] E. N. Cameron and others 1961 Rotation properties of certain anisotropic ore minerals. *Econ. Geol.*, Vol. 56.
- [7] E. N. Cameron, 1961 Ore Microscopy.
- [8] H. V. Eales 1965 Polarization figures as an aid to identification of polished isotropic minerals. *Amer. Miner.* Vol. 50.
- [9] H. Freund, 1966 Applied Ore Microscopy.
- [10] A. F. Hallimond, 1970 The polarizing microscope.
- [11] R. Galopin and N. F. M. Henry, 1972 Microscopic study of opaque minerals.
- [12] M. Berek, 1937 Optische Messmethoden im polarisierten Auflicht. *Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie*, Vol. 22.
- [13] Ф. И. Федоров, 1958 Оптика анизотропных сред.
- [14] А. В. Соколов, 1961 Оптические свойства металлов.
- [15] А. П. Пришивалко, 1963 Отражение света от поглощающих сред.
- [16] И. С. Волынский и др., 1965 Экспериментально методические исследования рудных минералов.

QUANTITATIVE THEORY ON THE POLARIZATION FIGURES OF ANISOTROPIC MINERALS

Wang Shu

Abstract

In this paper theoretical formulas are derived for calculation of the following optics related to the polarization figures of the anisotropic minerals from the quantitative theory related to the polarization figures of isotropic minerals.

1. Combination rotation angle of reflection and anisotropism (AR).
2. Combination apparent rotation angle (ARr).
3. Equation of black isogyres.
4. Angular distance of black isogyres 2α .
5. Reflectivity between crossed polars (ar_+).
6. Average reflectivity between crossed polars ($\overline{ar_+}$).
7. Average reflectivity ($\overline{R}$).

The origin and a variety of related optical phenomena of the polarization figures of anisotropic minerals are interpreted quantitatively by using these formulas, and some new conclusions are suggested.

At the end of this paper, as examples, calcite with cleavage, rutile and hematite are calculated.